

工程流体力学 · 流体静力学

ENGINEERING FLUID MECHANICS · FLUID STATICS

孙东科

dksun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院，江苏南京
School of Mechanical Engineering, Southeast University, China

Fluid Statics

主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

Engineering Fluid Mechanics • Fluid Statics

流体静力学研究对象

- 流体静力学研究流体处于静止或相对静止时的规律及其应用。
- 静止或相对静止时，流体之间没有相对运动，黏性作用表现不出来。因此，理想流体和实际流体具有同样的物理规律。

主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

作用在流体表面上的力

■ 两类作用在流体上的力：表面力和质量力

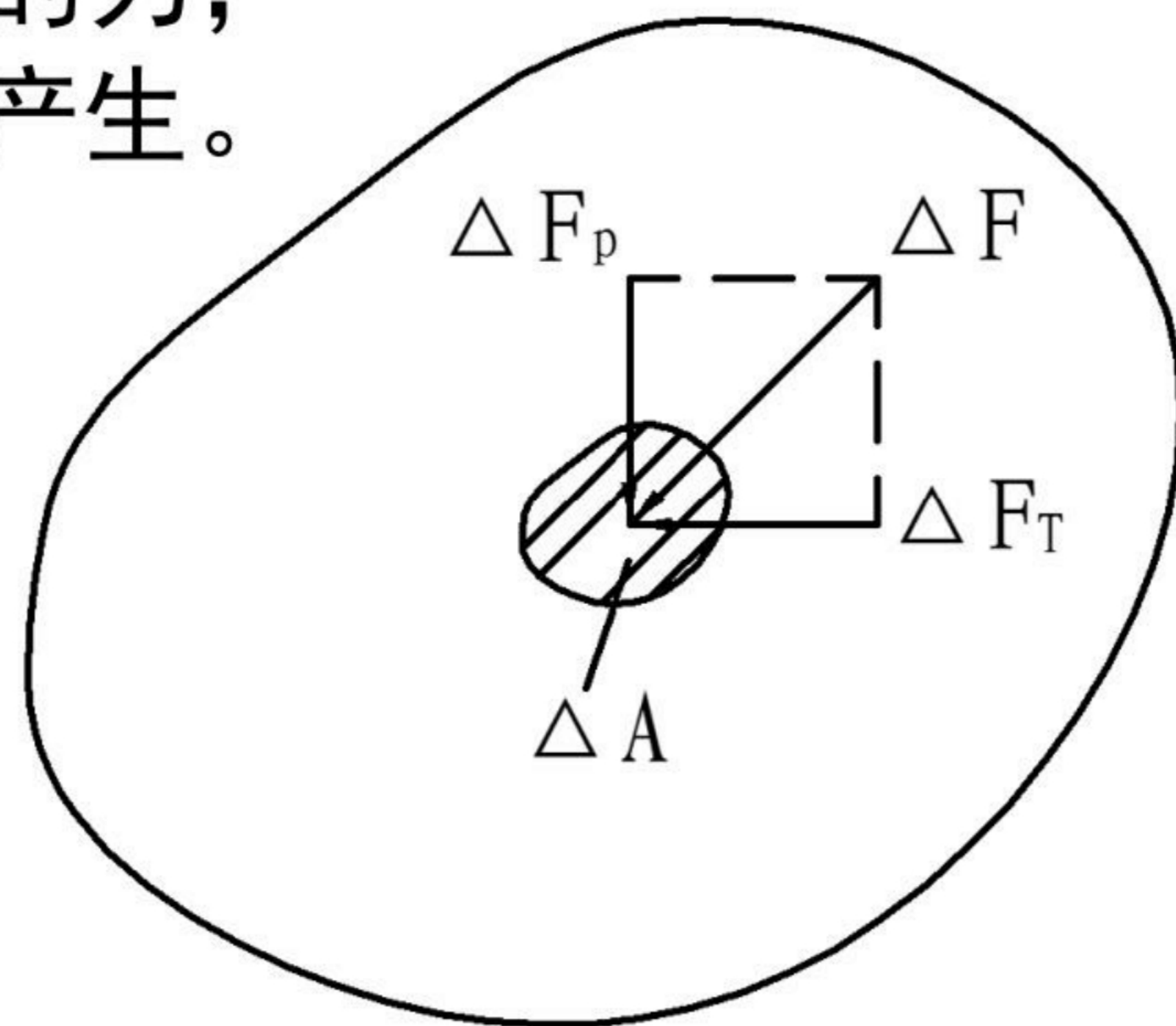
- ▶ **表面力**：作用在所研究流体微团表面上的力，因流体接触其他物体（流体或固体）而产生。

① 应力：单位面积上的表面力

$$\vec{p}_\eta = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$$

② 正应力和切应力

$$\vec{p}_{nn} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_n}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_n}{dA} \quad \vec{p}_{n\tau} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}_\tau}{\Delta A} = \frac{d\vec{F}_\tau}{dA}$$



作用在流体表面上的力

- 正应力：拉应力与压应力，流体压强——法向压应力
- 切应力：流体黏性引起的内摩擦力就是切应力
- ▶ 质量力（体积力）：作用在每个流体微团上的力，其大小与流体质量成正比。

例如：重力、惯性力、磁力。

单位质量力

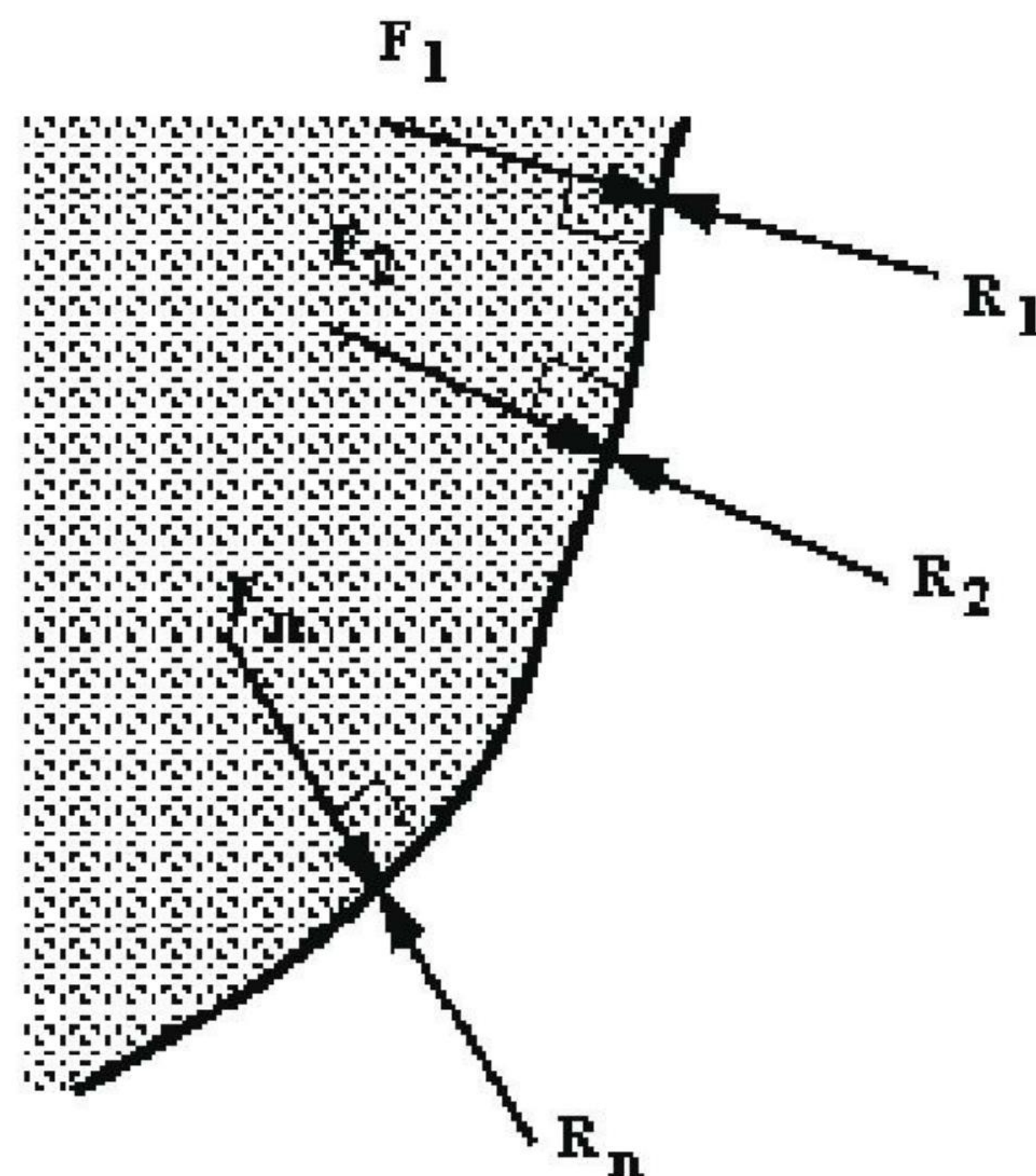
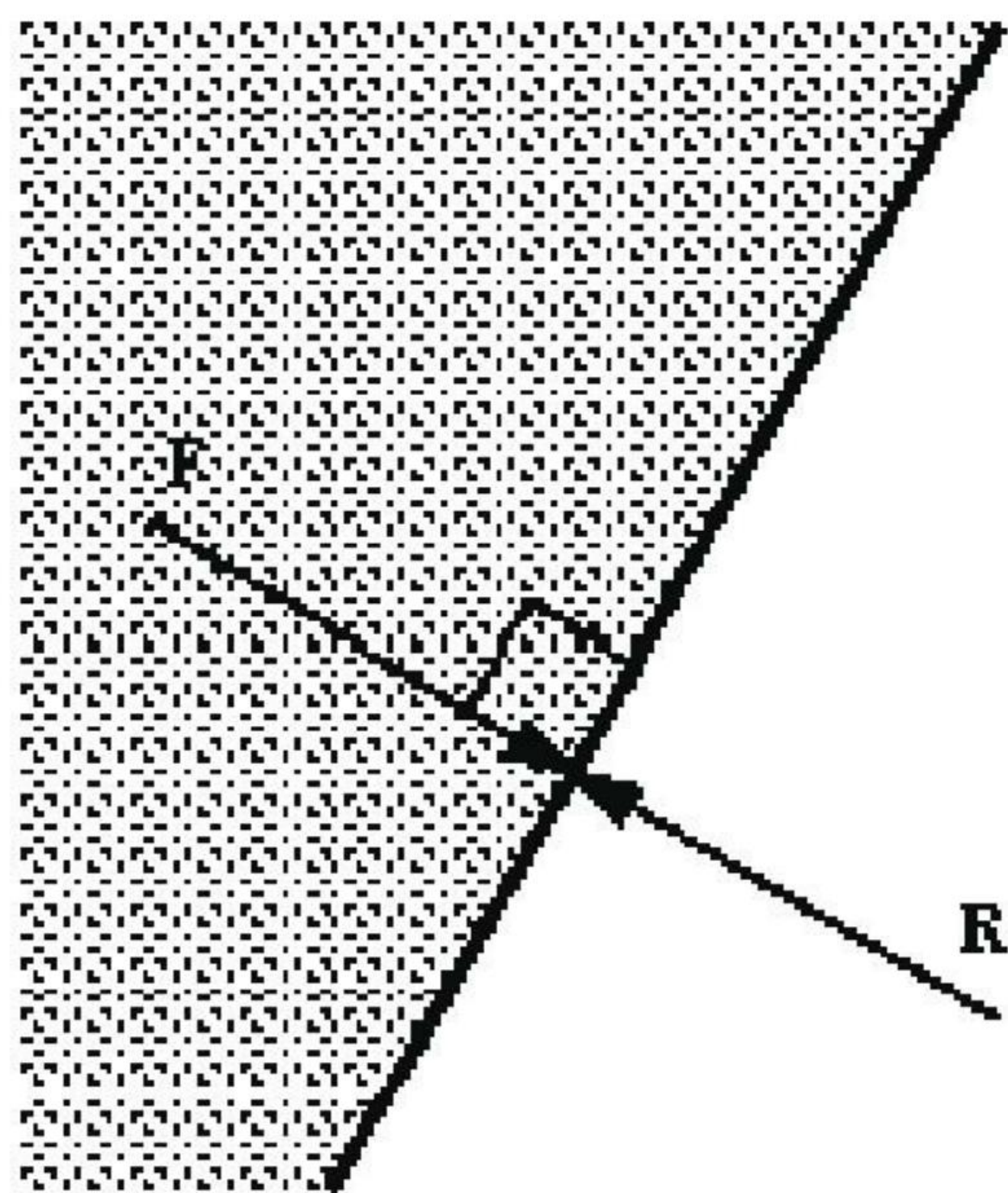
$$\vec{f} = f_x \vec{i} + f_y \vec{j} + f_z \vec{k}$$

- ▶ 流体静压强：流体处于绝对静止或相对静止时的压强

$$p = \lim_{\Delta A} \frac{\Delta P}{\Delta A} = \frac{dP}{dA}$$

流体静压强的两个特性

- ① 方向性：流体静压力的方向总是沿着作用面的内法线方向



原因：静止流体不能承受剪力，即 $\tau = 0$ ，故 p 垂直受压面；因流体几乎不能承受拉力，故 p 指向受压面。

流体静压强的两个特性

- ② 大小性：流体静压力与作用面在空间的方位无关，仅是该点坐标的函数。

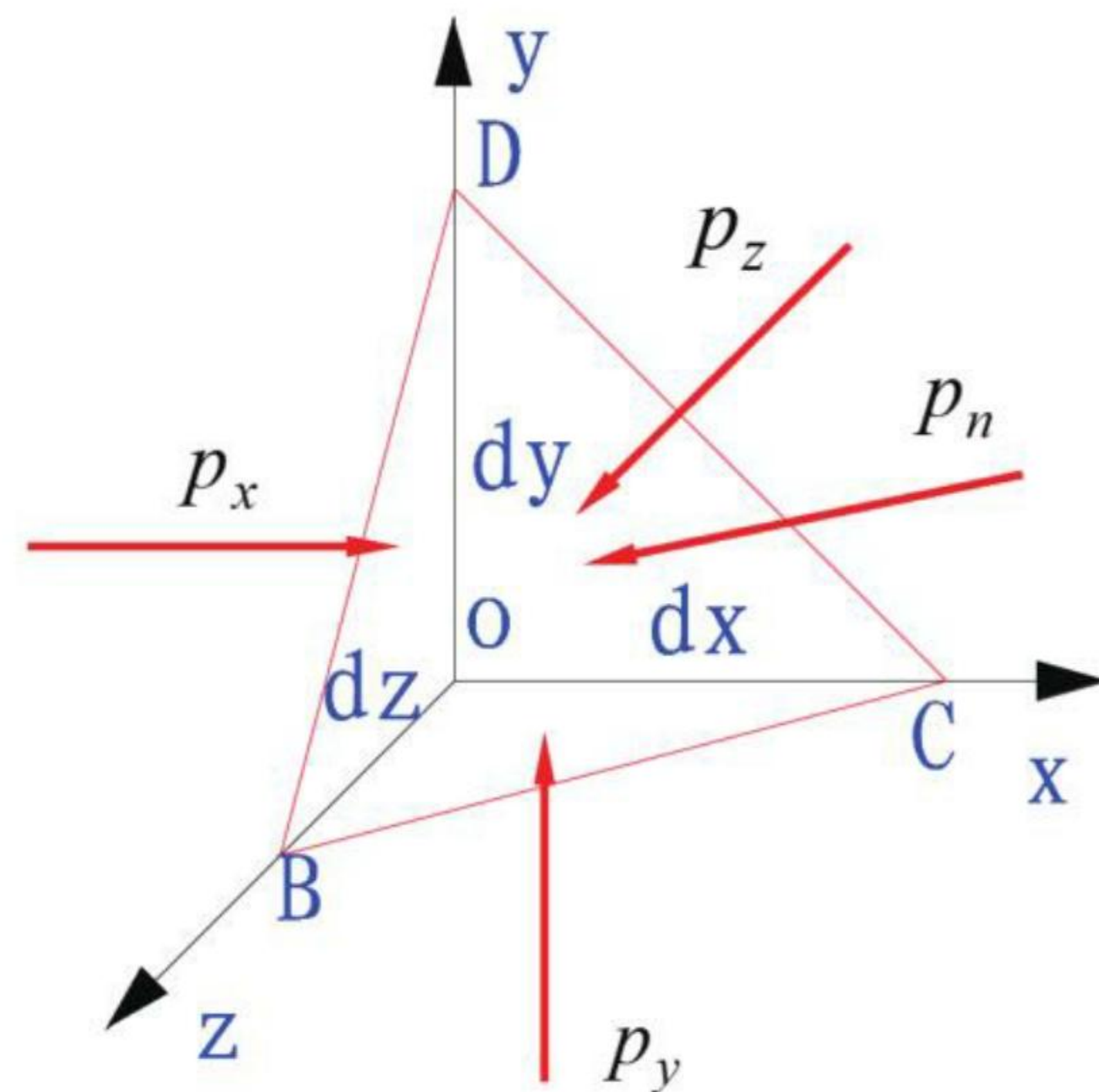
$$p_x \cdot \frac{1}{2} dy dz - p_n \cdot dA \cos(n, x) + f_x \cdot \rho \frac{1}{6} dx dy dz = 0$$

$$\xrightarrow{dA \cos(n, x) = \frac{1}{2} dy dz} p_x - p_n + f_x \cdot \rho \frac{1}{3} dx = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_x - p_n + f_x \cdot \rho \frac{1}{3} dx = 0 \\ p_y - p_n + f_y \cdot \rho \frac{1}{3} dy = 0 \\ p_z - p_n + f_z \cdot \rho \frac{1}{3} dz = 0 \end{cases}$$

略去无穷小项
含 dx, dy, dz 项

$$p_x = p_y = p_z = p_n$$



主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程**
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

流体平衡微分方程

■ 平衡微分方程式

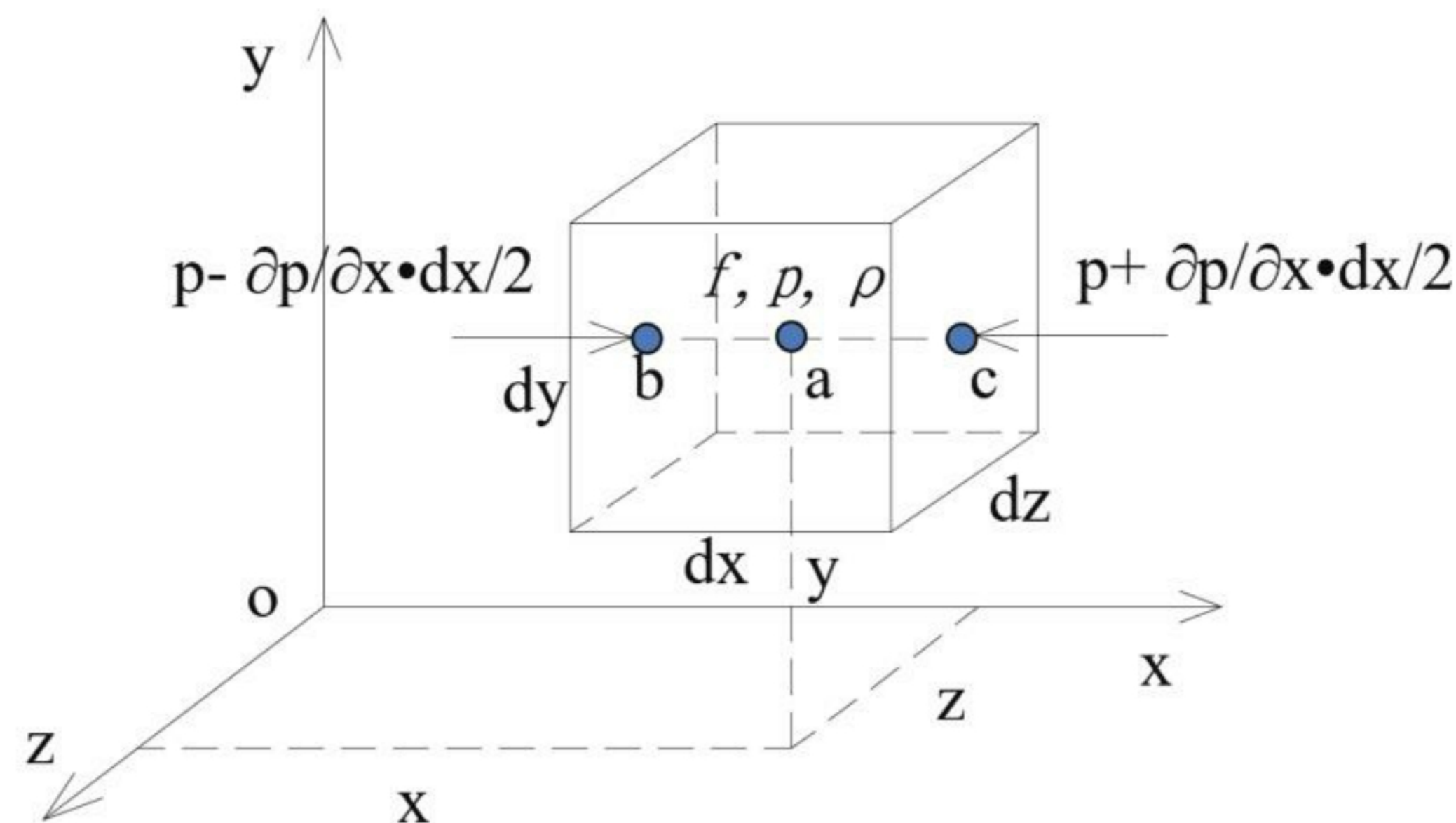
在静止流体中取如图所示微小六面体。设其中心点 $a(x, y, z)$ 的密度为 ρ ，压强为 p ，所受质量力为 f 。

以 x 方向为例，列力平衡方程式

表面力:

$$p_b dydz - p_c dydz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz$$

质量力: $f_x \cdot \rho dx dy dz$



$$\sum F_x = 0, \quad \rho f_x dx dy dz - \frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz = 0, \quad f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$$

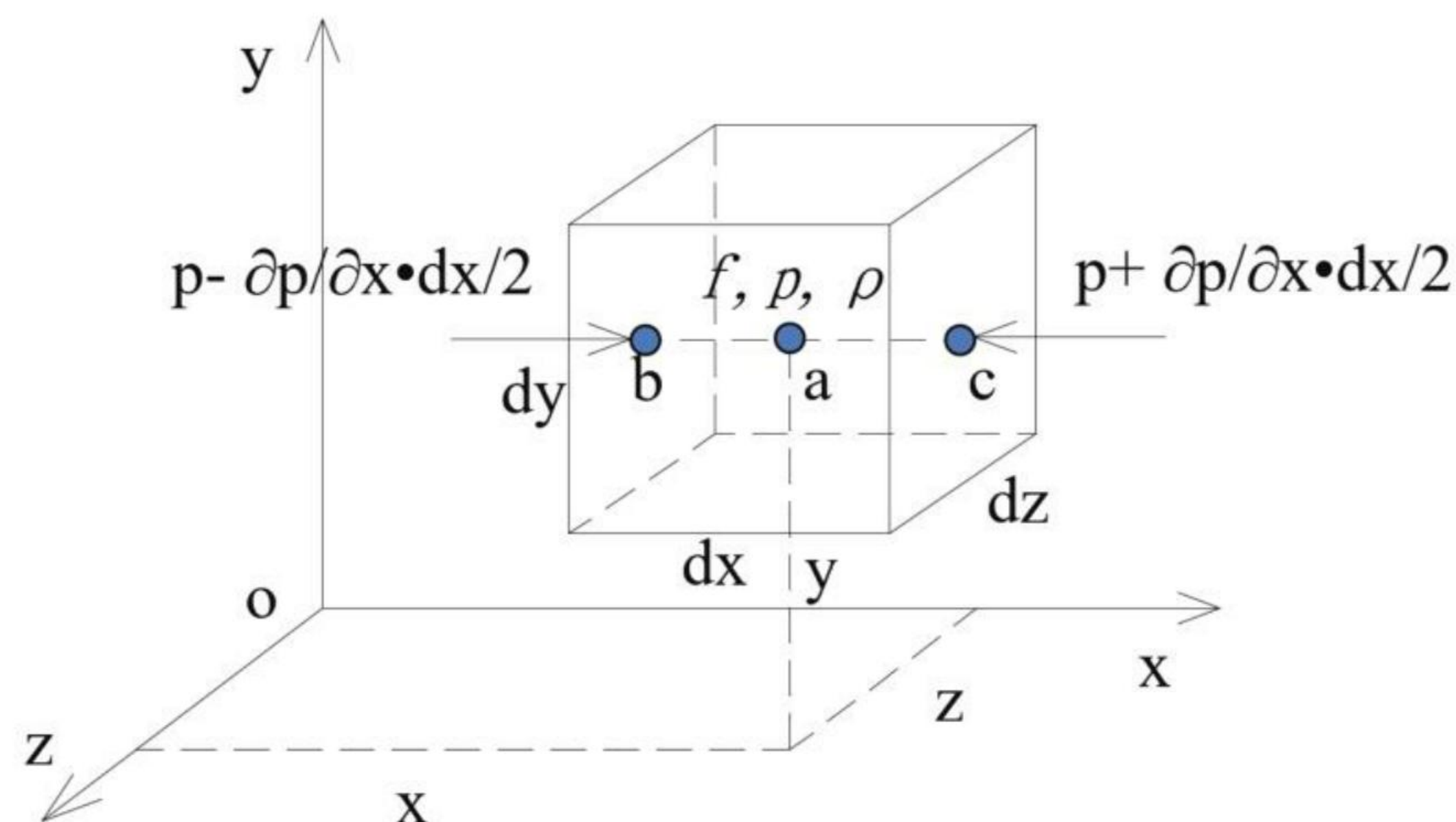
流体平衡微分方程

同理，考虑 y 、 z 方向，可得：

$$\begin{cases} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

矢量形式： $\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = 0$

上式即为流体平衡微分方程——欧拉平衡微分方程。



物理意义：在静止流体中，单位质量流体上的质量力与静压强的合力相平衡。

适用范围：所有静止流体或相对静止的流体。

流体平衡微分方程

■ 势函数

压强差公式 $dp = \frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz$

$$\begin{cases} f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \\ f_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z \end{cases} \Rightarrow dp = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz)$$

物理意义：流体静压强的增量决定于质量力

流体平衡微分方程

■ 势函数

不可压缩流体的压强差公式

$$\frac{dp}{\rho} = d\left(\frac{p}{\rho}\right) = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

令

$$f_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x}, f_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y}, f_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z}$$

则

$$d(-\pi) = \frac{dp}{\rho} = f_x dx + f_y dy + f_z dz$$

其中, $-\pi(x, y, z)$ —— 质量力势函数或势函数

流体平衡微分方程

■ 等压面

① 定义 流场中压强相等的各点组成的面 $dp = 0$

② 微分方程

$$\left. \begin{array}{l} dp = \rho (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \\ dp = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f_x dx + f_y dy + f_z dz = 0$$

或

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = 0$$

③ 性质 等压面恒与质量力正交

$$\vec{f} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \vec{f} \perp d\vec{r}$$

主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式**
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

流体静力学基本方程式

■ 重力场中流体静力学基本方程式

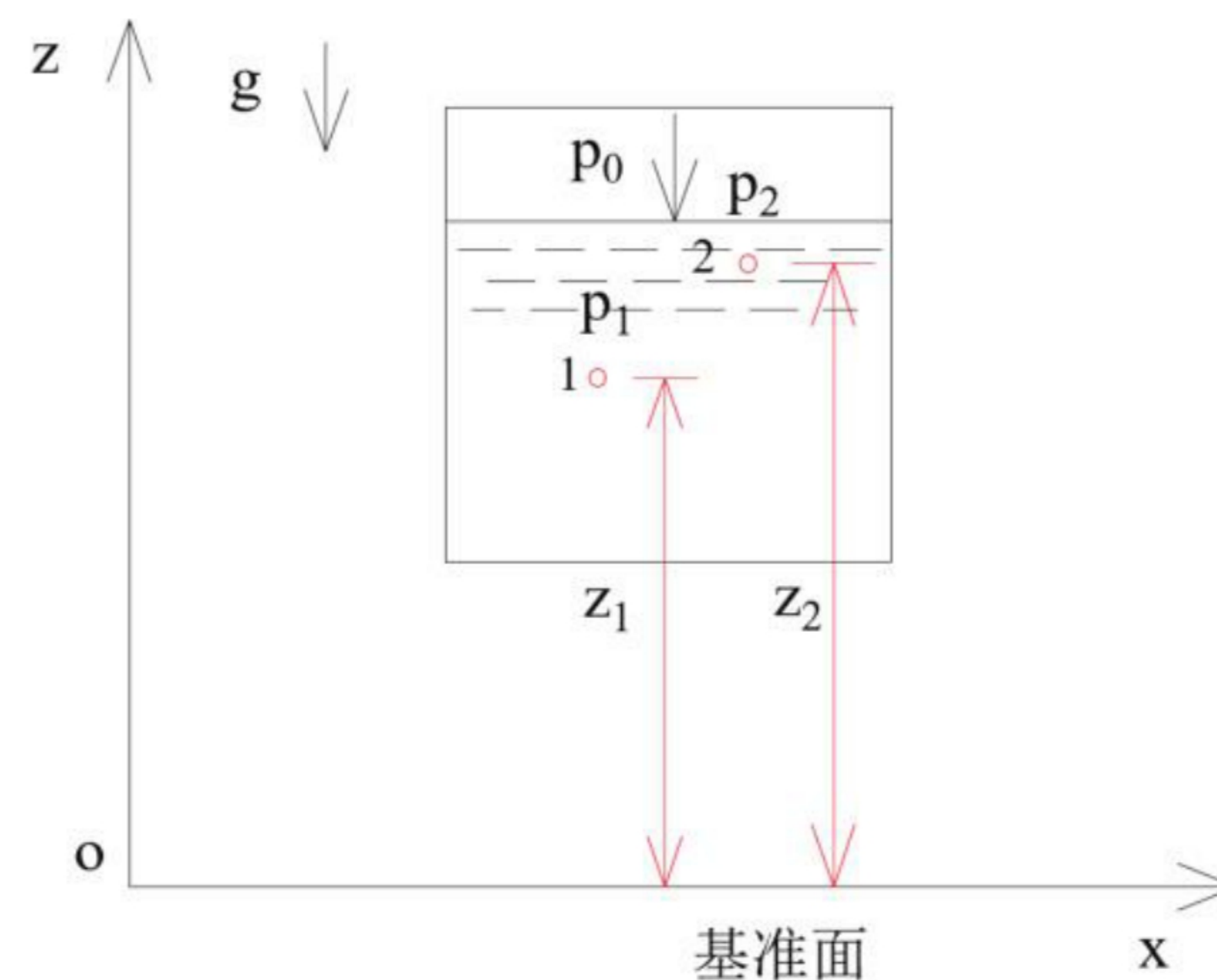
- 作用在流体上的质量力只有重力
- 均匀的不可压缩流体

① 基本方程式

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = -g \end{cases} \Rightarrow dp = -\rho g dz \Rightarrow dz + \frac{dp}{\rho g} = 0$$

积分得:

$$z + \frac{p}{\rho g} = C \quad \Rightarrow \quad z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}$$

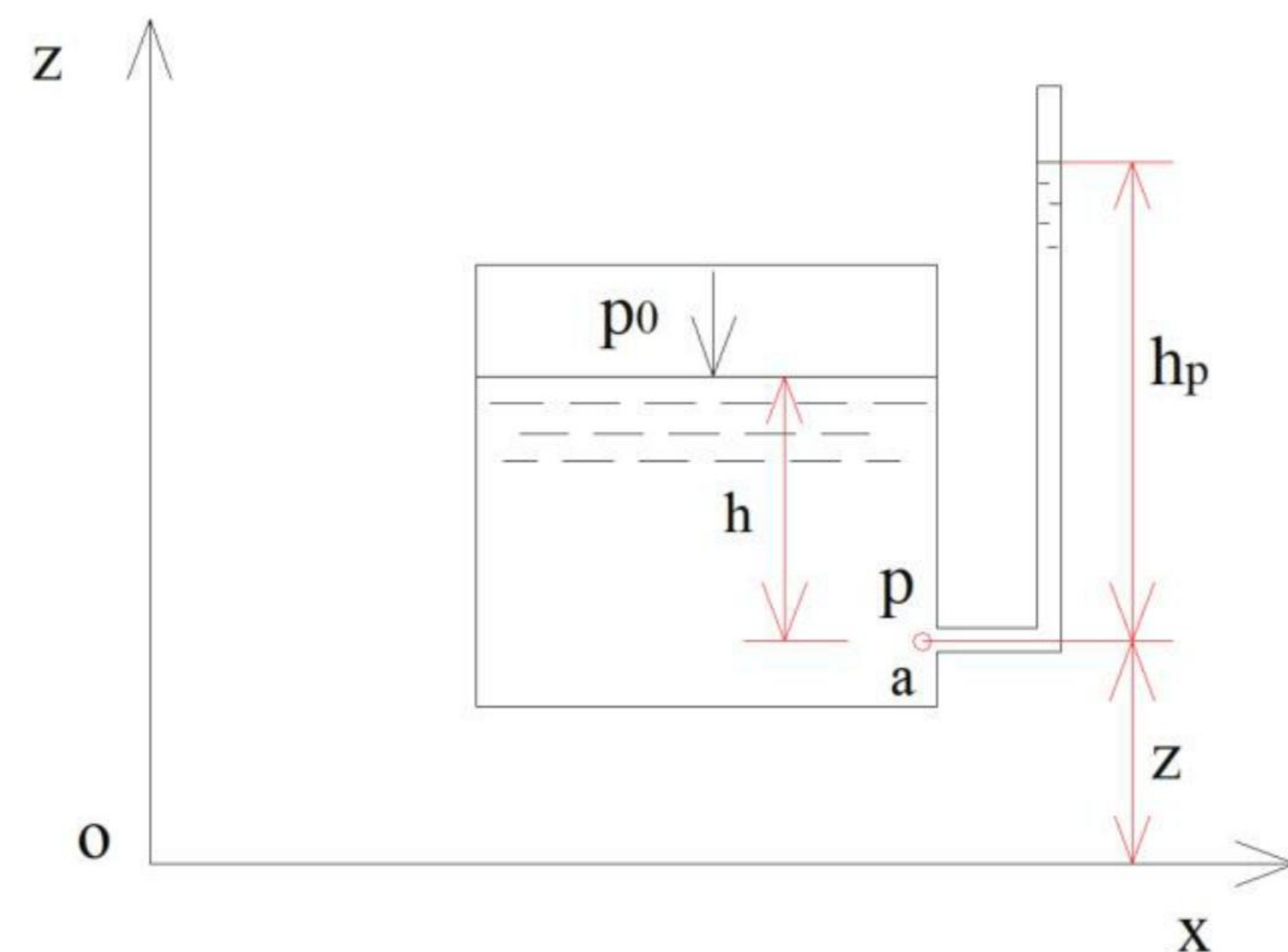


■ 重力场中流体静力学基本方程式

② 物理意义

$$z + \frac{p}{\rho g} = C$$

$\downarrow$ 位 压 总
 势 强 势
 能 能 能
 h_p



在重力作用下的连续均质不可压缩静止流体中，各点的单位重力流体的总势能保持不变。

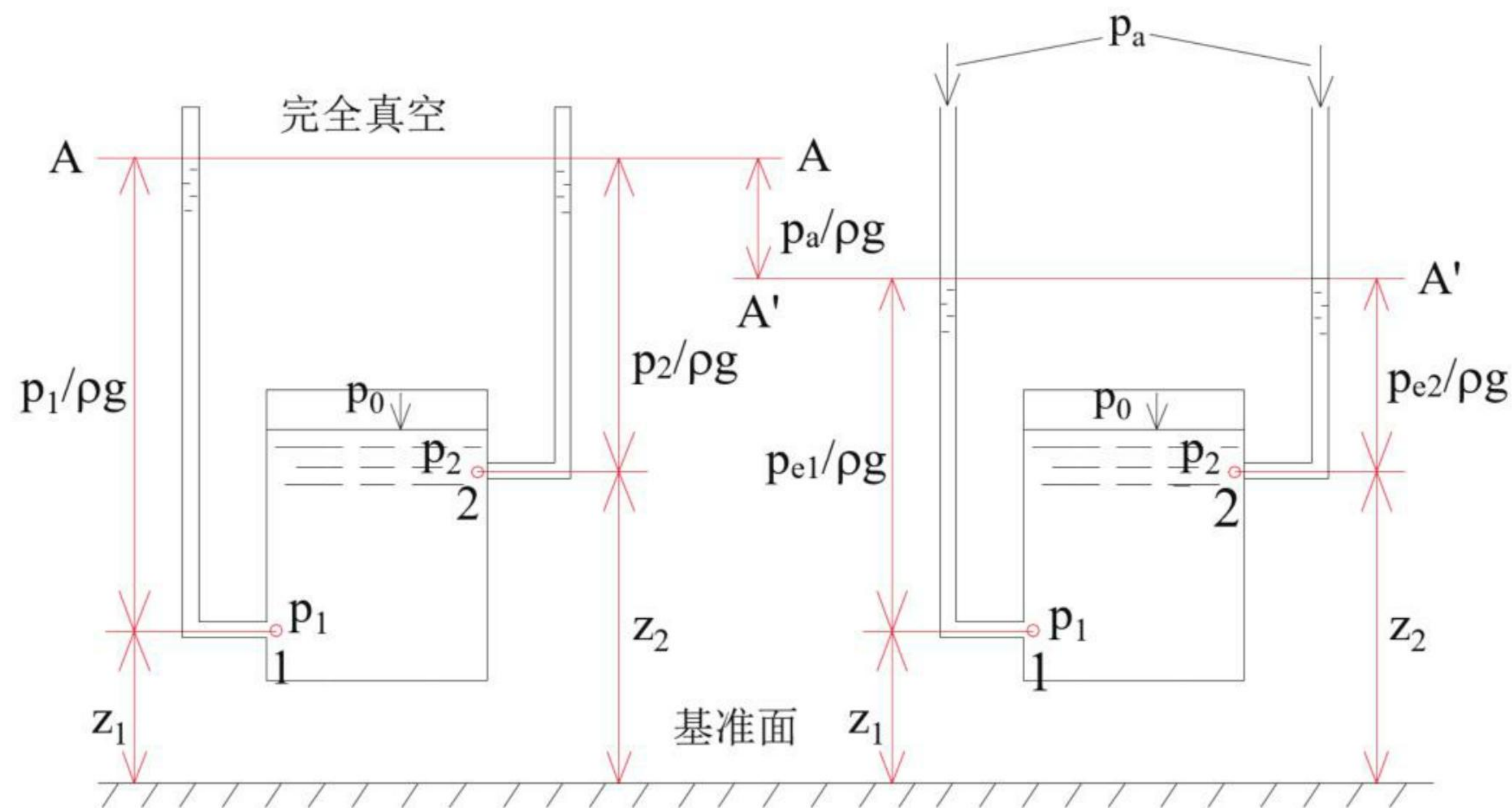
流体静力学基本方程式

■ 重力场中流体静力学基本方程式

③ 几何意义

$$z + \frac{p}{\rho g} = C$$

$\downarrow$ 位置水头 $\downarrow$ 压强水头 $\downarrow$ 静水头



在重力作用下的连续均质不可压缩静止流体中，静水头线为水平线。

流体静力学基本方程式

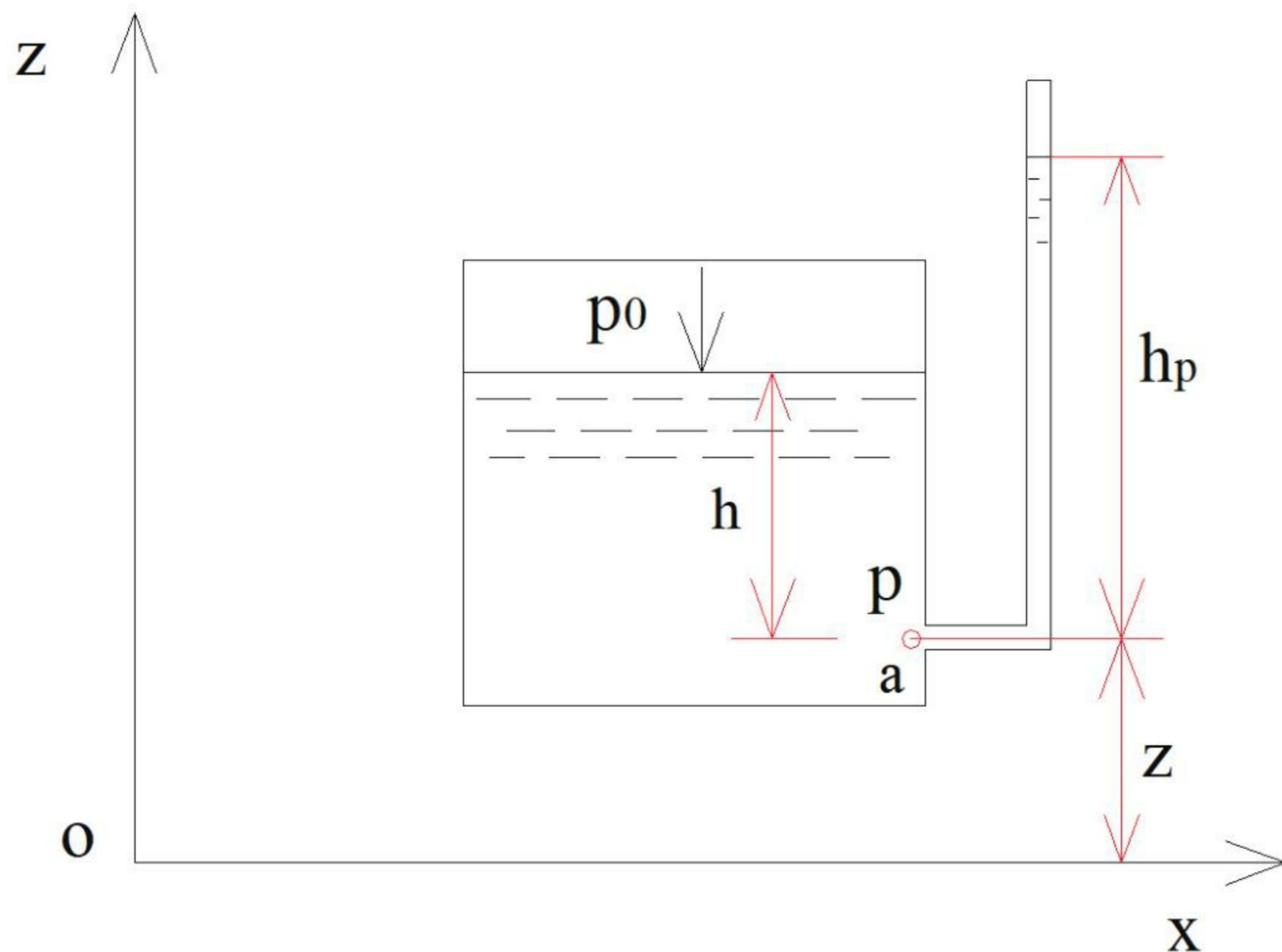
■ 重力场中流体静力学基本方程式

④ 帕斯卡原理: a 点压强

$$z + \frac{p}{\rho g} = (z + h) + \frac{p_0}{\rho g}$$

$$p = p_0 + \rho gh$$

在重力作用下不可压缩流体表面上的压强，将以同一数值沿各个方向传递到流体中的所有流体质点



流体静力学基本方程式

■ 大气同温层中变密度气体的压强分布公式

同温层的海拔高度 11000 m – 25000 m

只有重力的质量力 $f_x = 0, f_y = 0, f_z = -g$

气体状态方程: $p = \rho RT \Rightarrow \rho = p/(RT)$

$$f_z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \Rightarrow dp = \rho f_z dz = \frac{p}{RT} (-g) dz$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{-g}{RT} dz \Rightarrow RT \frac{dp}{p} + g dz = 0$$

积分得:

$$RT \ln p + gz = C \quad (C \text{ 为常数})$$

流体静力学基本方程式

■ 大气同温层中变密度气体的压强分布公式

若 $z = z_0$ 时 $p = p_0$ $c = gz_0 + RT \ln p_0$

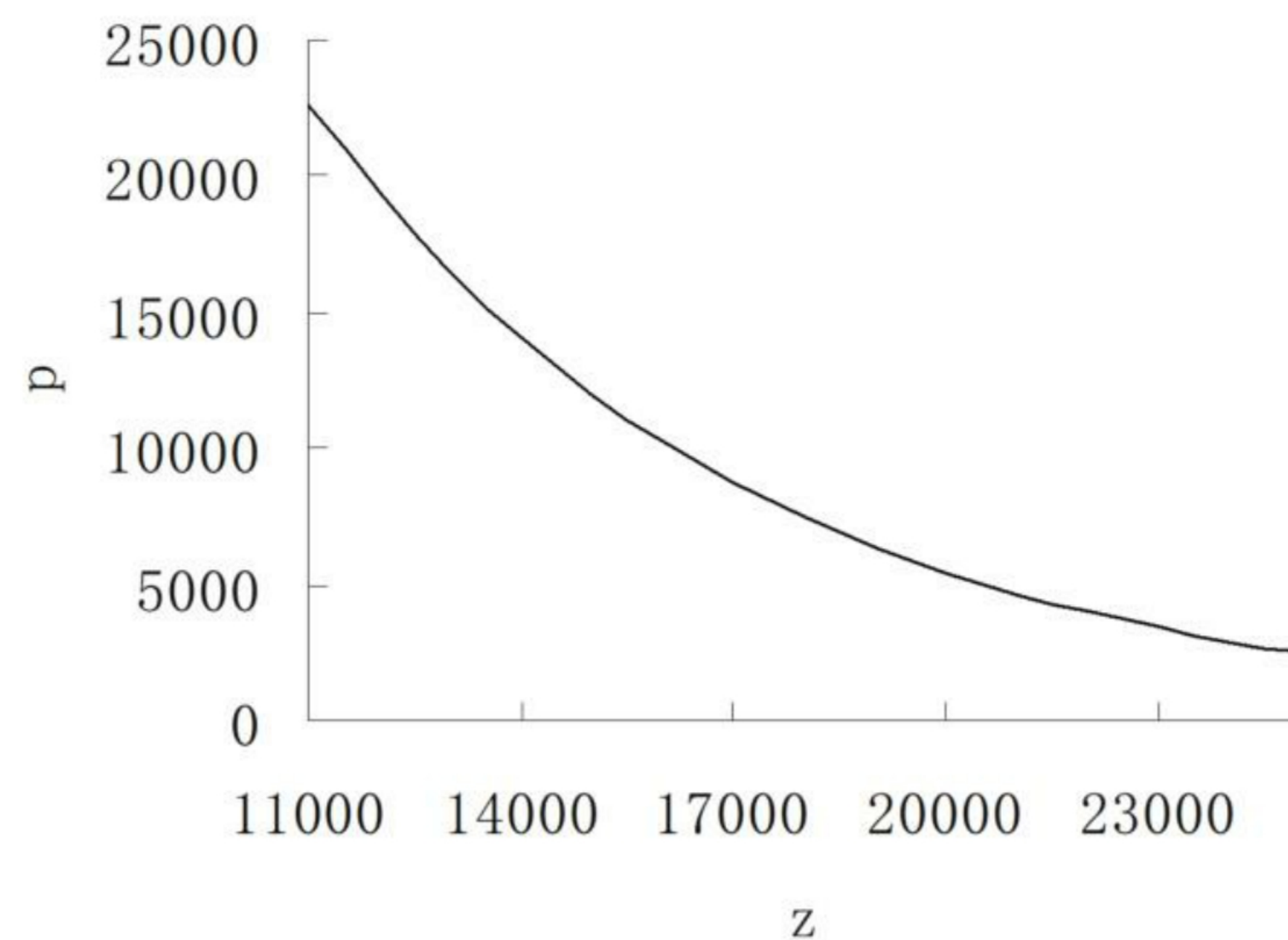
$$\Rightarrow z - z_0 = \frac{RT}{g} \ln \frac{p_0}{p} \text{ 或写成 } p = p_0 \exp \left(\frac{g(z_0 - z)}{RT} \right)$$

同温层低层参数

$$z_0 = 11000 \text{ m}, \quad p_0 = 22604 \text{ Pa},$$

$$R = 287 \text{ J/(kgK)}, \quad T_c = 216.5 \text{ K}$$

$$p = 22604 \exp \left(\frac{11000 - z}{6334} \right) \text{ Pa}$$



主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计**
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

压强的计量

■ 压强的计量

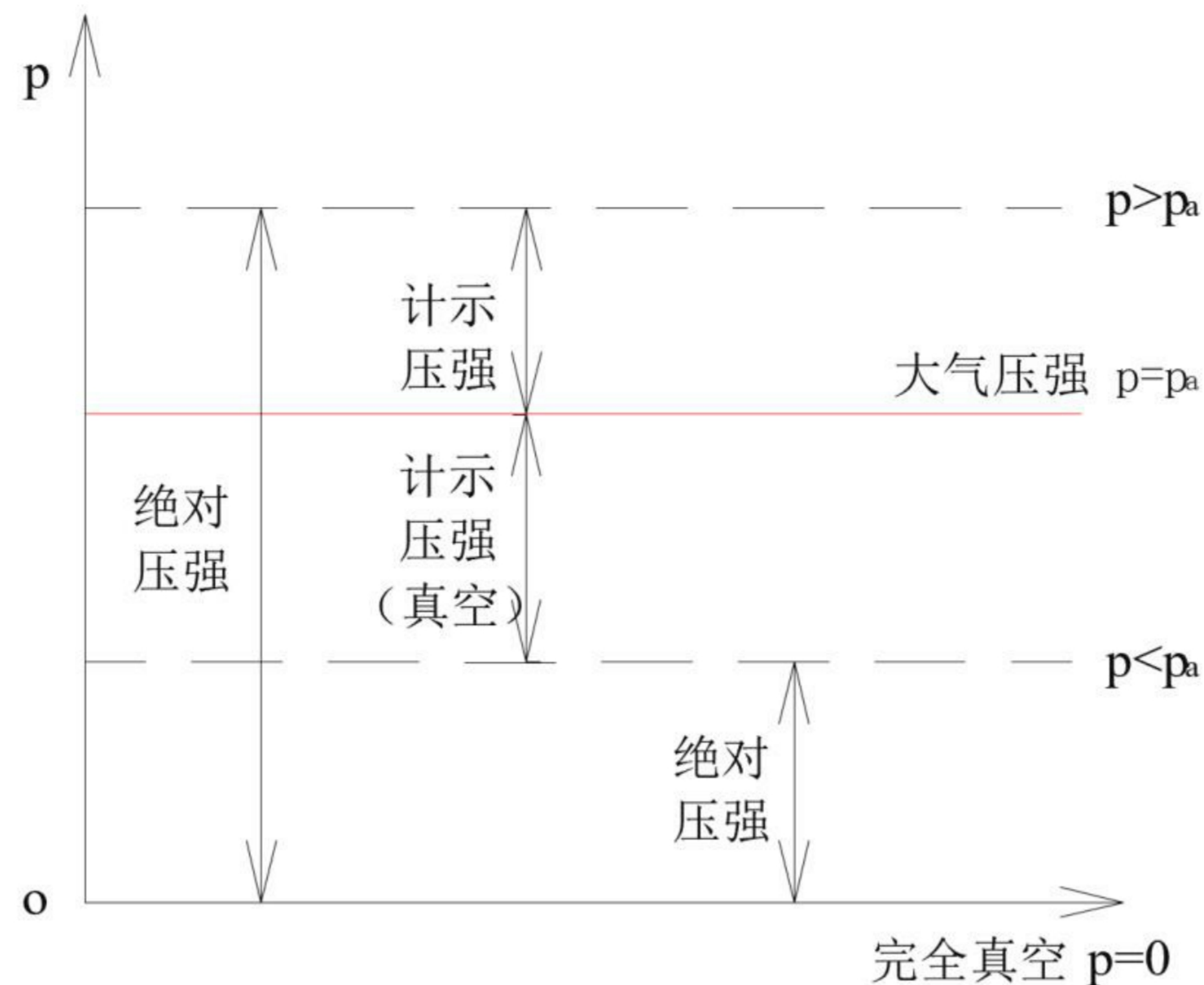
- ① 绝对压强：以完全真空为基准计量的压强
- ② 计示压强：以当地大气压强为基准计量的压强

相对压强：

$$p > p_a \quad p_e = p - p_a$$

真空(度)：

$$p < p_a \quad p_v = p_a - p$$



液柱式测压计

■ 液柱式测压计

① 测压管

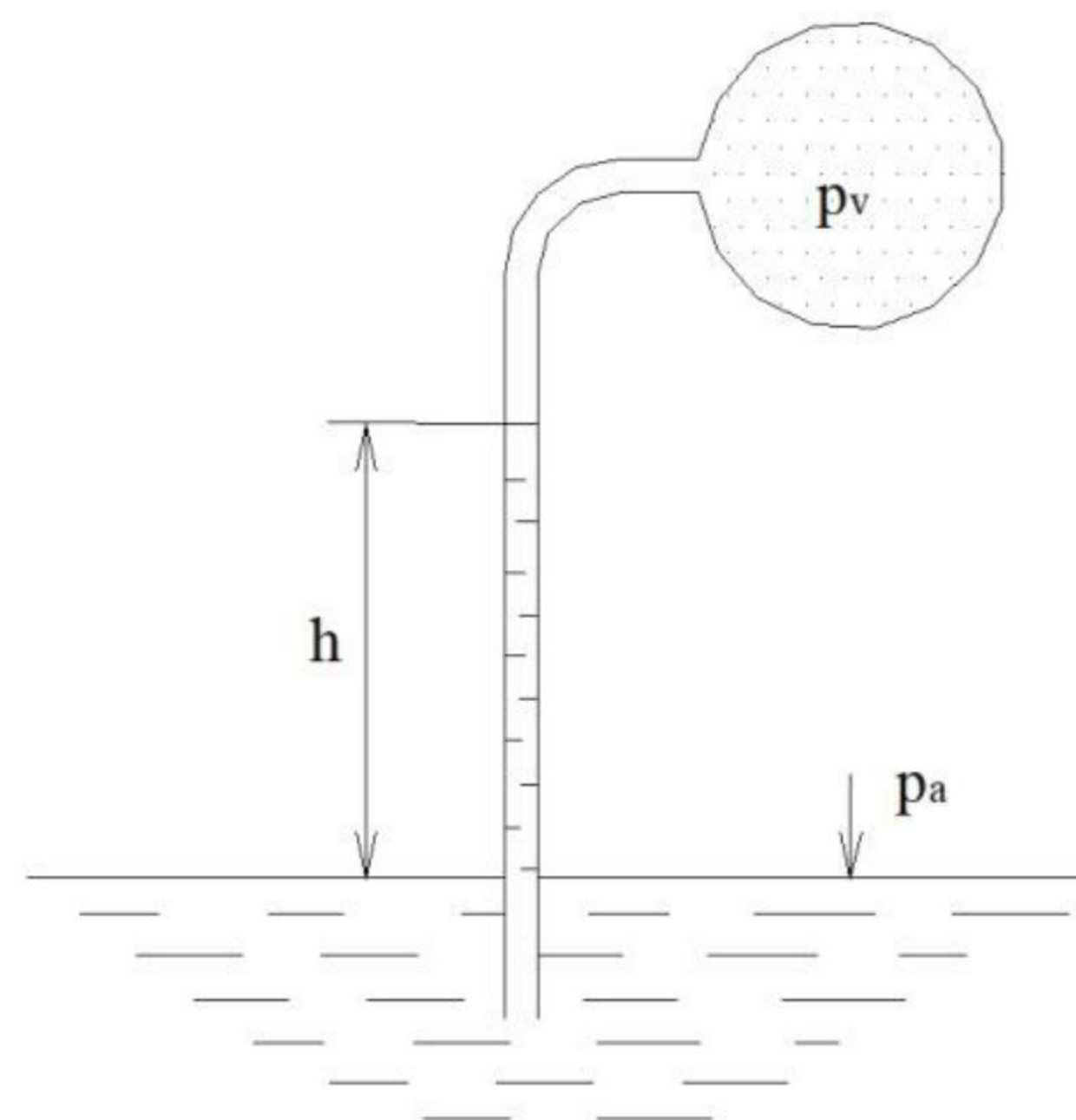
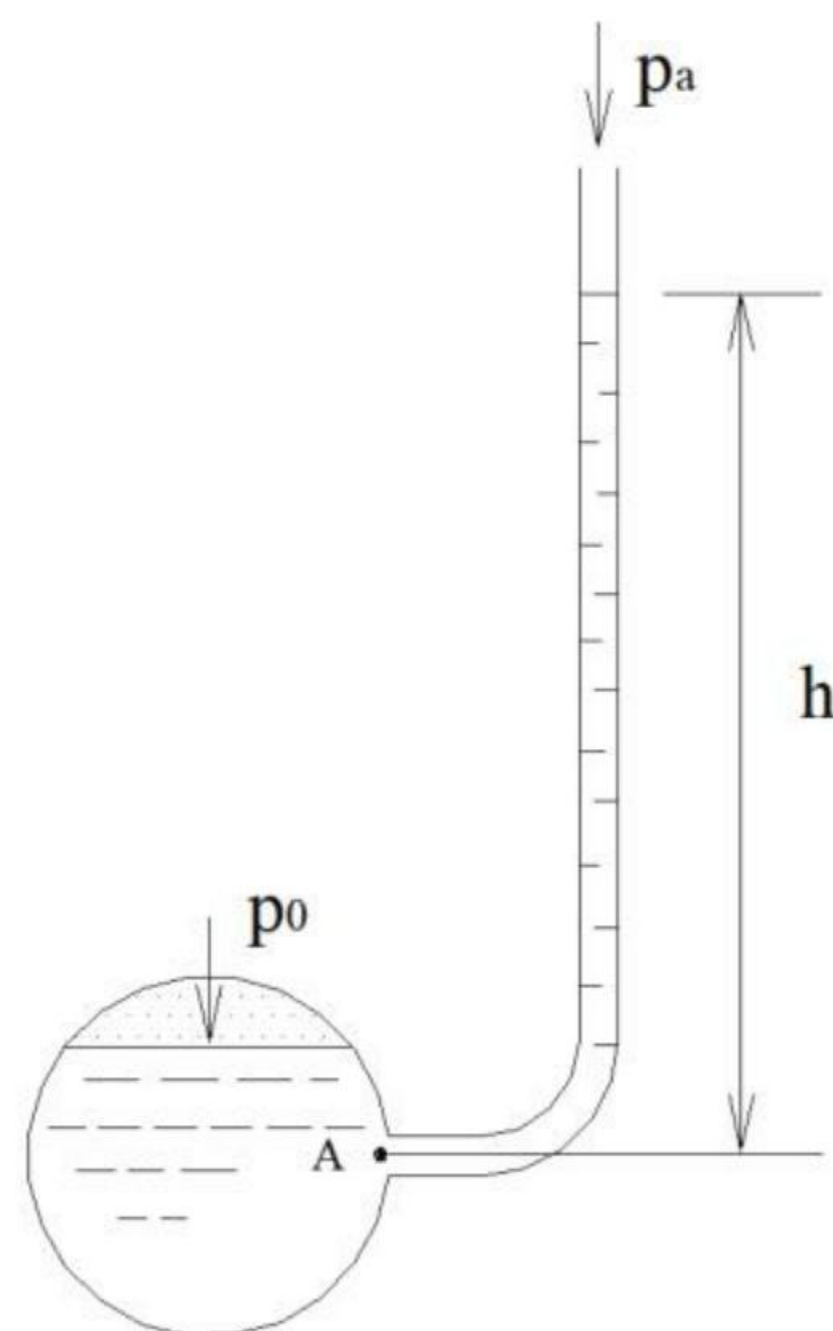
测压管是一根直径均匀的玻璃管，直接连在需要测量压强的容器上，以流体静力学基本方程式为理论依据

表压 $p_e = \rho gh$

真空 $p_v = \rho gh$

优点：结构简单

缺点：只能测量较小的压强



液柱式测压计

■ 液柱式测压计

② U形管测压计

$$p_1 = p + \rho gh_1$$

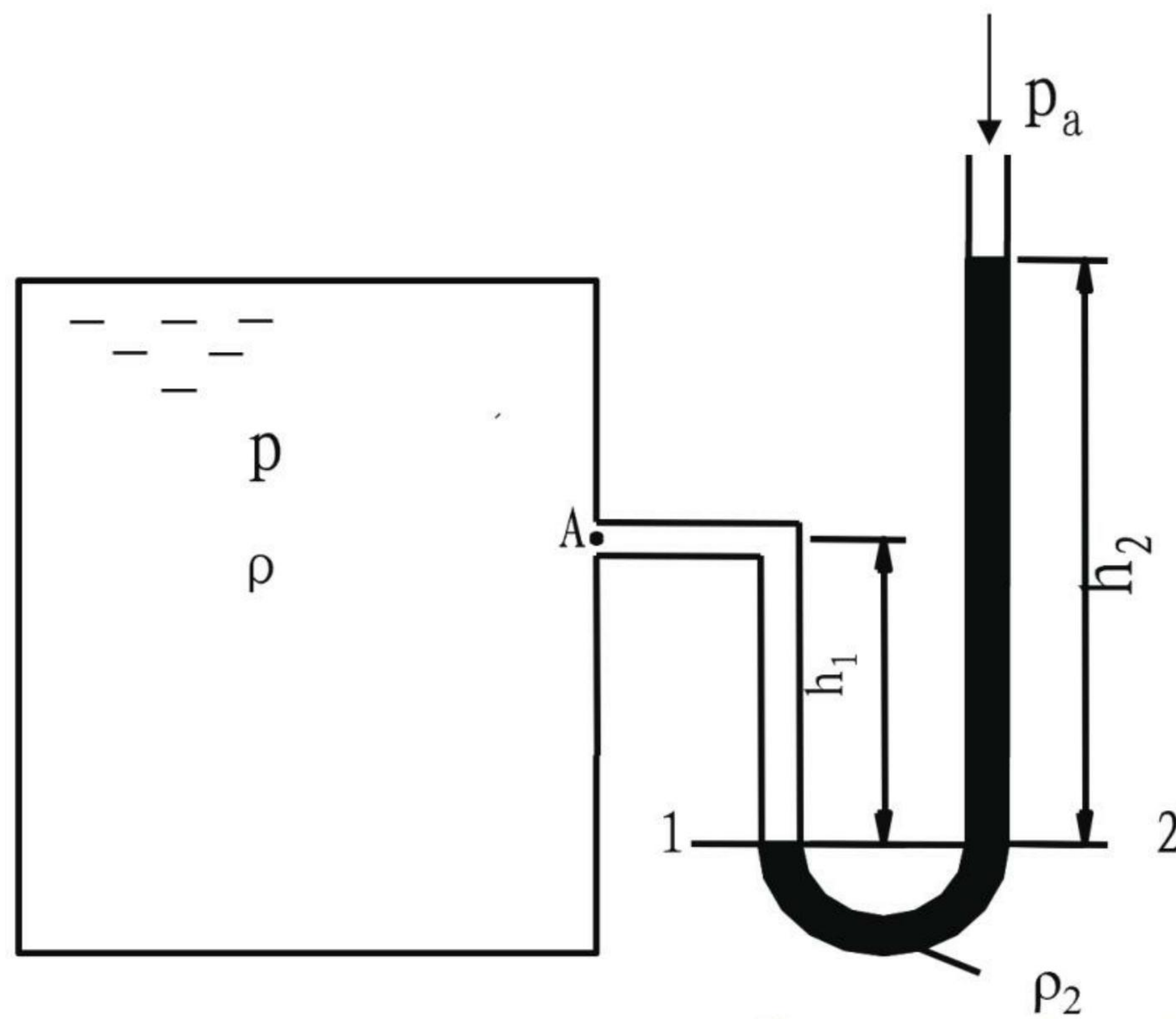
$$p_2 = p_a + \rho_2 gh_2$$

$$\Downarrow \quad p_1 = p_2$$

$$p = p_a + \rho_2 gh_2 - \rho gh_1$$

$$p_e = \rho_2 gh_2 - \rho gh_1$$

优点: 可以测量较大的压强



液柱式测压计

■ 液柱式测压计

③ U形管差压计

测量同一容器两个不同位置的压差或不同容器的压强差

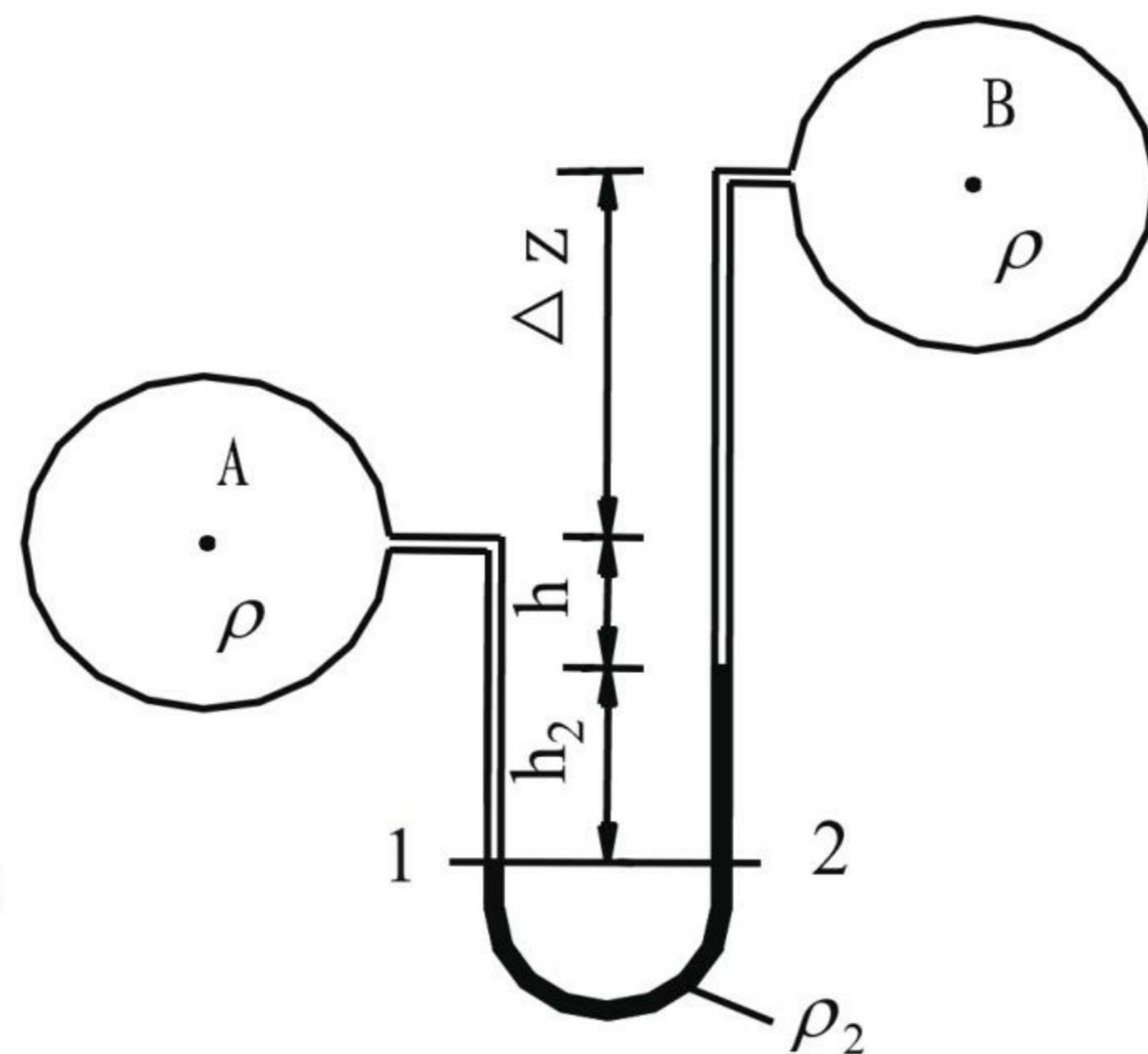
$$p_1 = p_A + \rho g (h + h_2)$$

$$p_2 = p_B + \rho g (h + \Delta z) + \rho_2$$

$$\Downarrow p_1 = p_2$$

$$p_A + \rho g (h + h_2) = p_B + \rho g (h + \Delta z) + \rho_2 g h_2$$

$$p_A - p_B = \rho g (\Delta z - h_2) + \rho_2 g h_2 = \rho g \Delta z + \rho_2 g (h_2 - h)$$



液柱式测压计

■ 倾斜微压计

④ 倾斜微压计

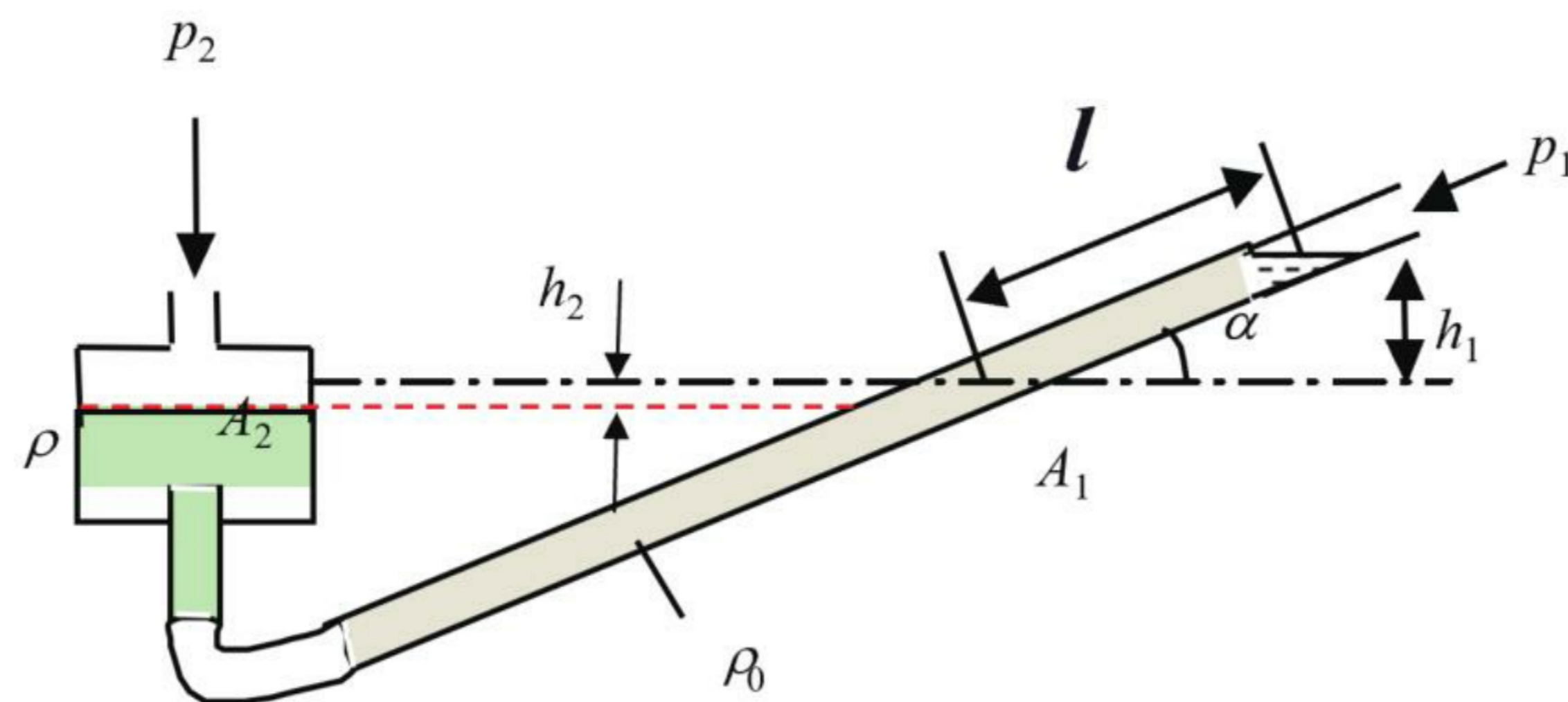
$$h_1 = l \sin \alpha$$

$$h_2 = l \frac{A_1}{A_2} \Rightarrow$$

$$h = h_1 + h_2 = l \left(\sin \alpha + \frac{A_1}{A_2} \right)$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g h = \rho g \left(\sin \alpha + \frac{A_1}{A_2} \right) l$$

优点: 可以测量较小的压强



主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡**
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

液体的相对平衡

液体的相对平衡

流体相对于地球有相对运动，而流体微团及流体与容器壁之间没有相对运动。



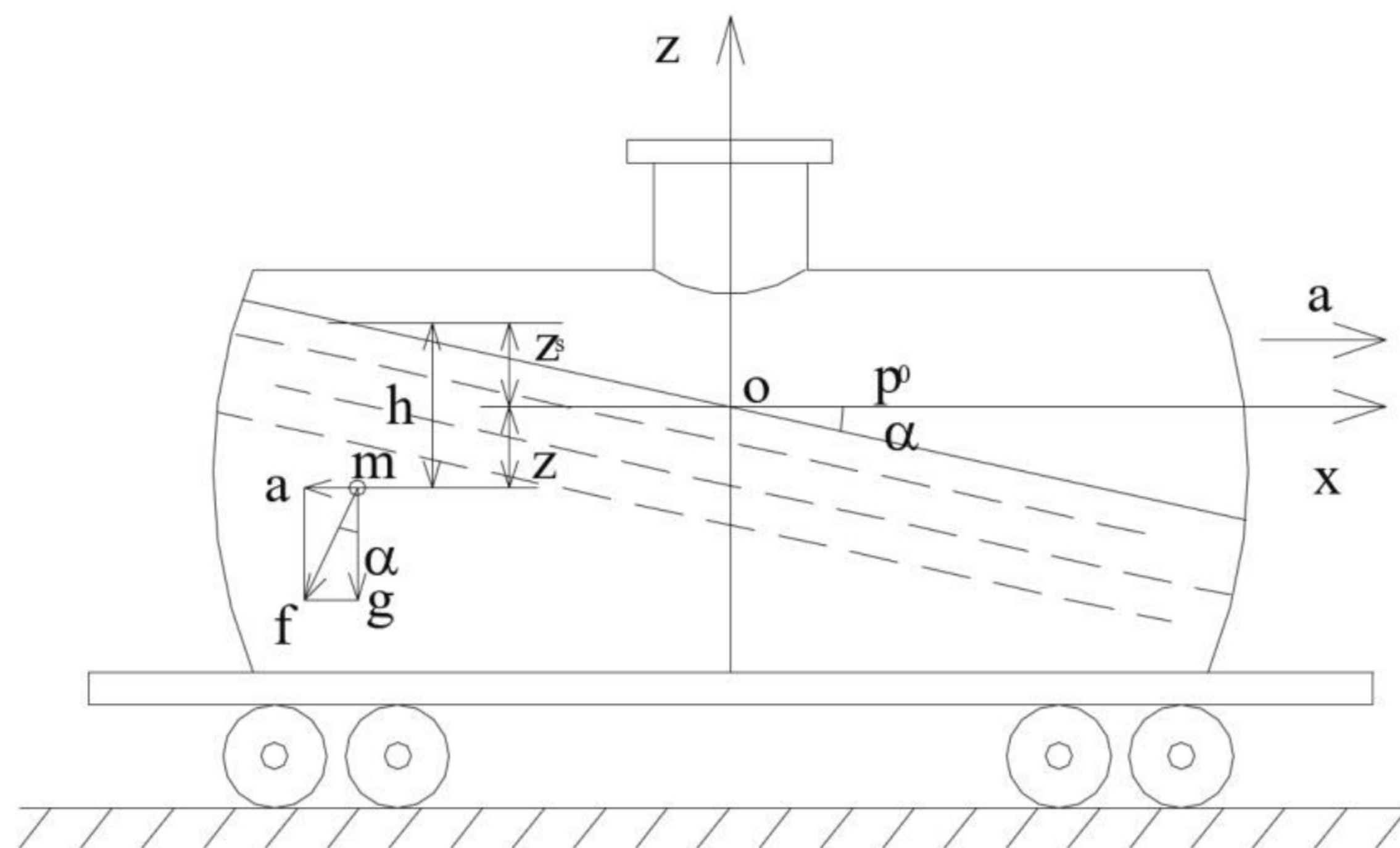
- ① 等加速水平运动容器中液体的相对平衡
- ② 等角速旋转容器中液体的相对平衡

等加速水平运动容器中液体的相对平衡

容器以等加速度 a 向右作水平直线运动

质量力

$$\begin{cases} f_x = -a \\ f_y = 0 \\ f_z = -g \end{cases}$$



等加速水平运动容器中液体的相对平衡

质量力 $f_x = -a$ $f_y = 0$ $f_z = -g$

① 等压面方程

$$\begin{aligned} dp &= \rho(f_x dx + f_z dz) \\ &= \rho(-a dx - g dz) = 0 \end{aligned}$$

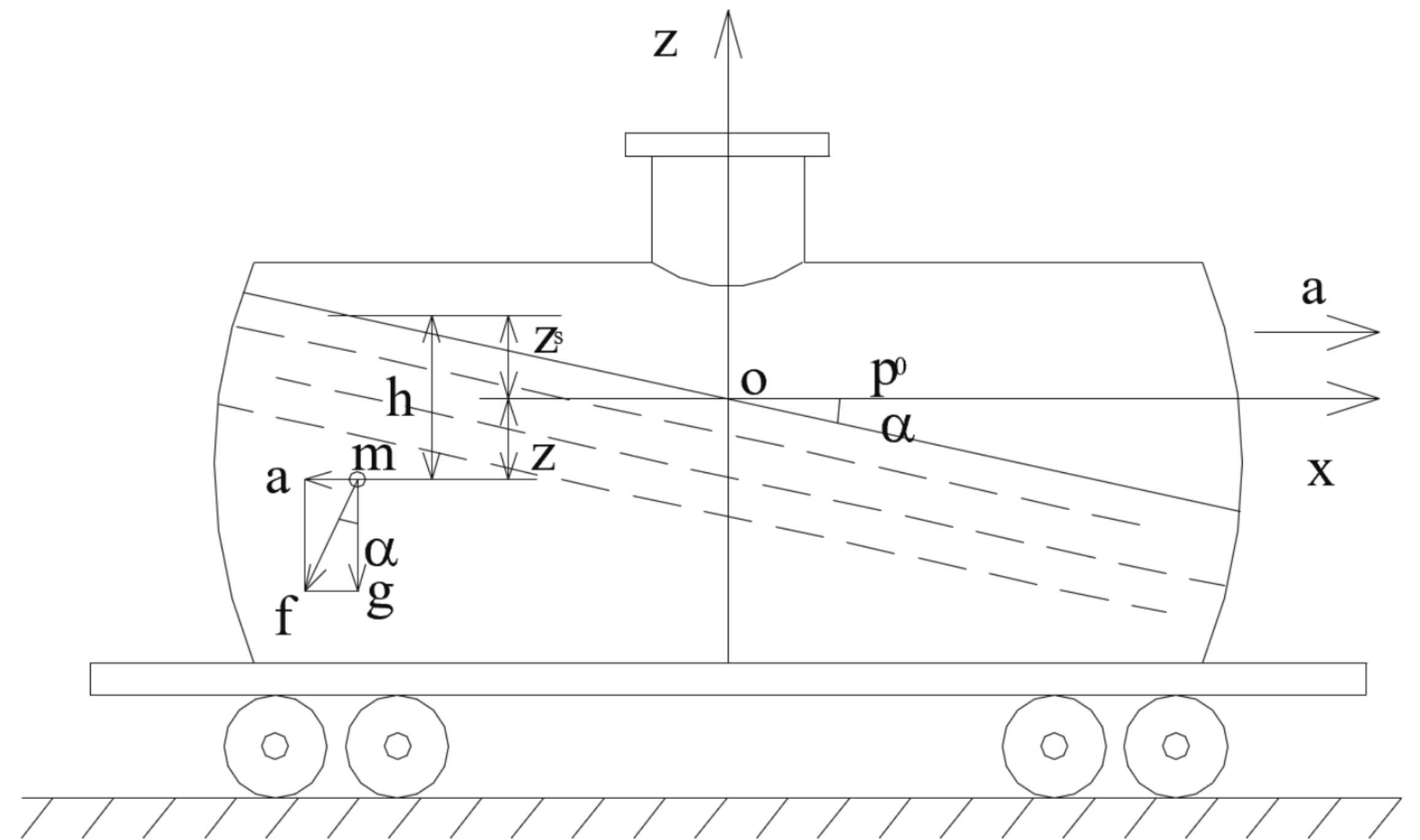
↓ 积分

$$ax + gz = C$$

等压面是一簇平行的斜面

$$\alpha = -\operatorname{arctg} \frac{a}{g}$$

自由液面: $x = 0$ $z = 0$ $C = 0$, $\Rightarrow$ $ax + gz_s = 0$.



等加速水平运动容器中液体的相对平衡

② 静压强分布规律

$$\begin{aligned} dp &= \rho (f_x dx + f_z dz) \\ &= \rho (-a dx - g dz) \end{aligned}$$

↓ 积分

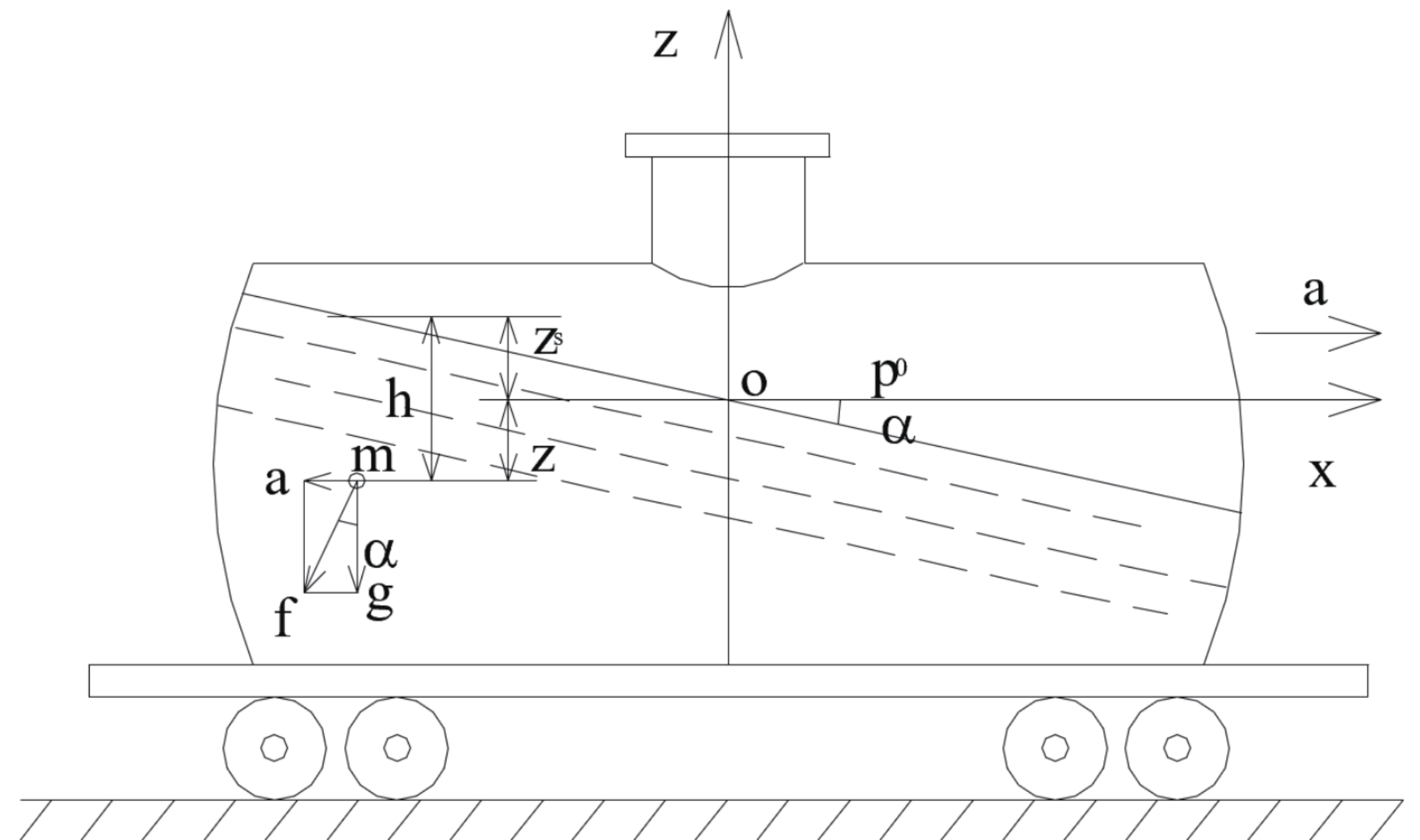
$$p = -\rho(ax + gz) + C$$

利用边界条件:

$$x = 0 \quad z = 0 \quad p = p_0$$

得: $C = p_0$

$$p = p_0 - \rho(ax + gz) \xrightarrow{ax + gz_s = 0} p = p_0 + \rho g(z_s - z) = p_0 + \rho gh$$



等加速水平运动容器中液体的相对平衡

③ 与绝对静止情况比较

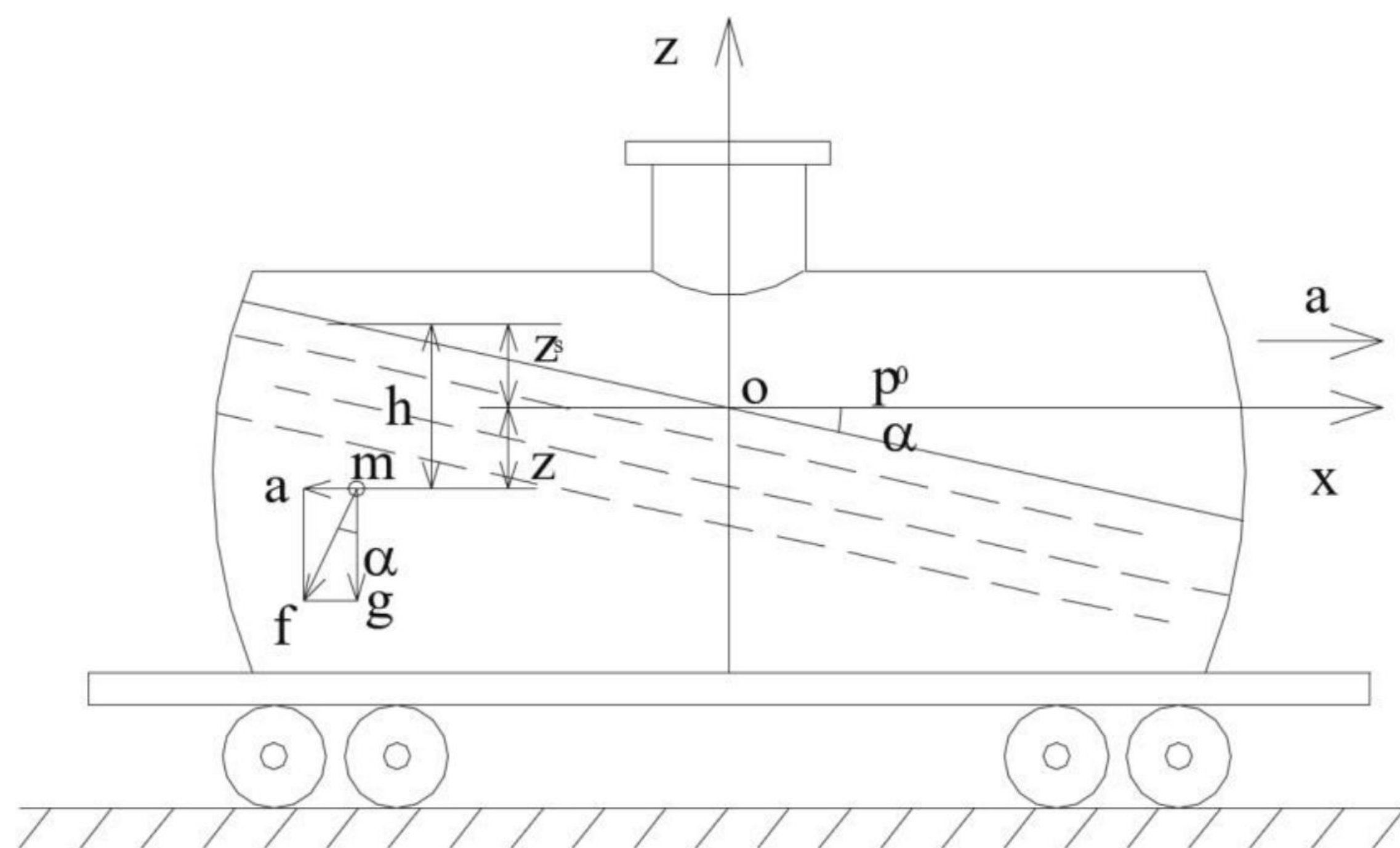
(1) 等压面

- 绝对静止: $z = c$ 水平面
- 相对静止: $z = -\frac{a}{g}x + c$ 斜面

(2) 压强分布

- 绝对静止: $p = p_0 + \rho gh$
- 相对静止:

$$p = p_0 + \rho g (z_s - z) = p_0 + \rho gh$$
 h 为任一点距离自由液面的淹深

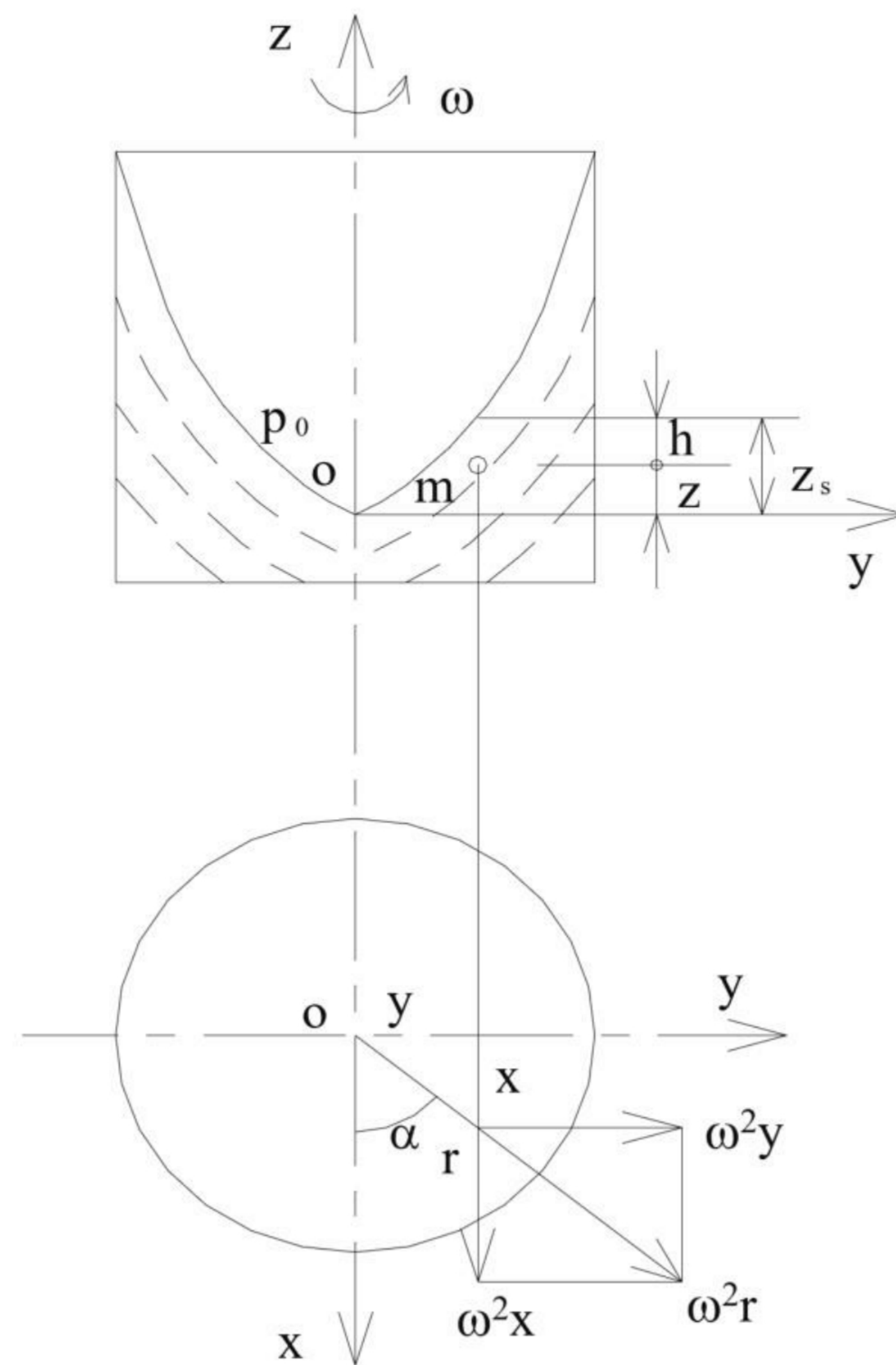


等角速旋转容器中液体的相对平衡

容器以等角速度 ω 旋转

质量力

$$\begin{cases} f_x = \omega^2 r \cos \alpha = \omega^2 x \\ f_y = \omega^2 r \sin \alpha = \omega^2 y \\ f_z = -g \end{cases}$$



等角速旋转容器中液体的相对平衡

① 等压面方程

$$dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz) = 0$$

↓ 积分

$$\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz = C, \quad \frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$$

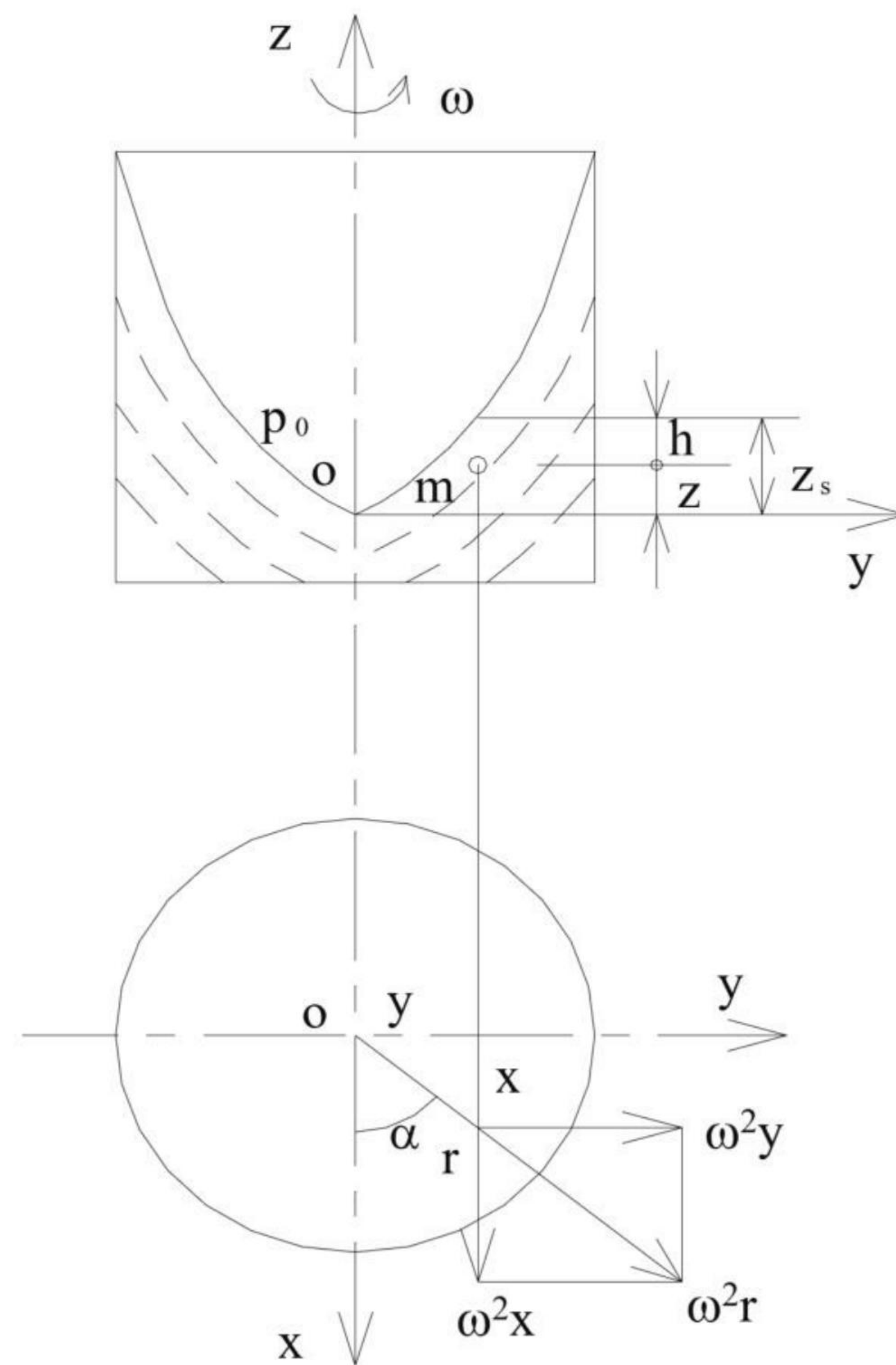
等压面是一簇绕 z 轴的旋转抛物面

自由液面:

$$r = 0 \quad z = 0 \quad C = 0$$

↓

$$\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz_s = 0$$



$$dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz)$$

积分

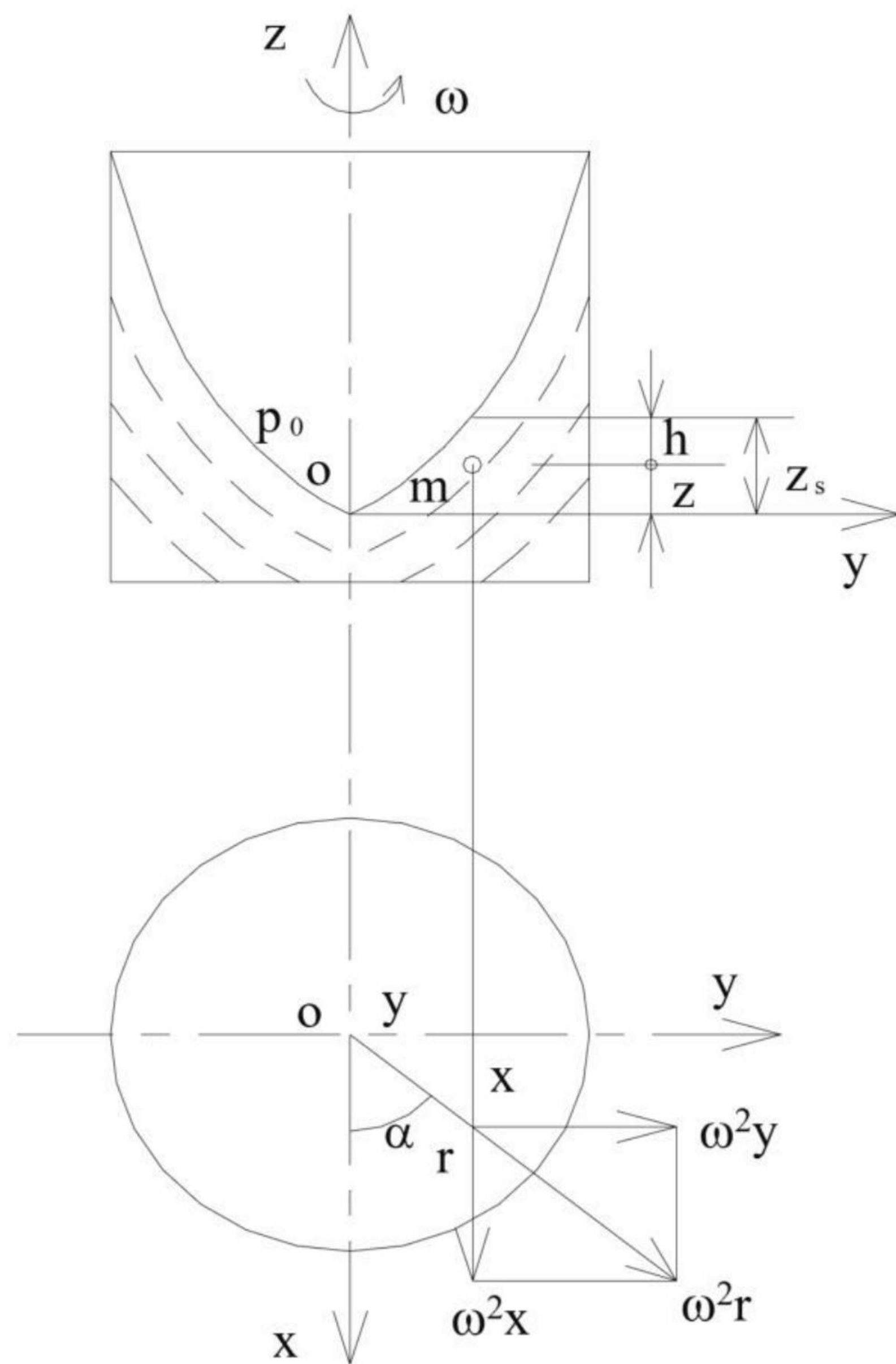
$$p = \rho \left(\frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{\omega^2 y^2}{2} - gz \right) + C = \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right) + C$$

利用边界条件 $r = 0$ $z = 0$ $p = p_0$ 得:

$$C = p_0, \quad p = p_0 + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

$$\Downarrow \frac{\omega^2 r^2}{2} - g z_s = C$$

$$p = p_0 + \rho g (z_S - z) = p_0 + \rho g h$$



③ 与绝对静止情况比较

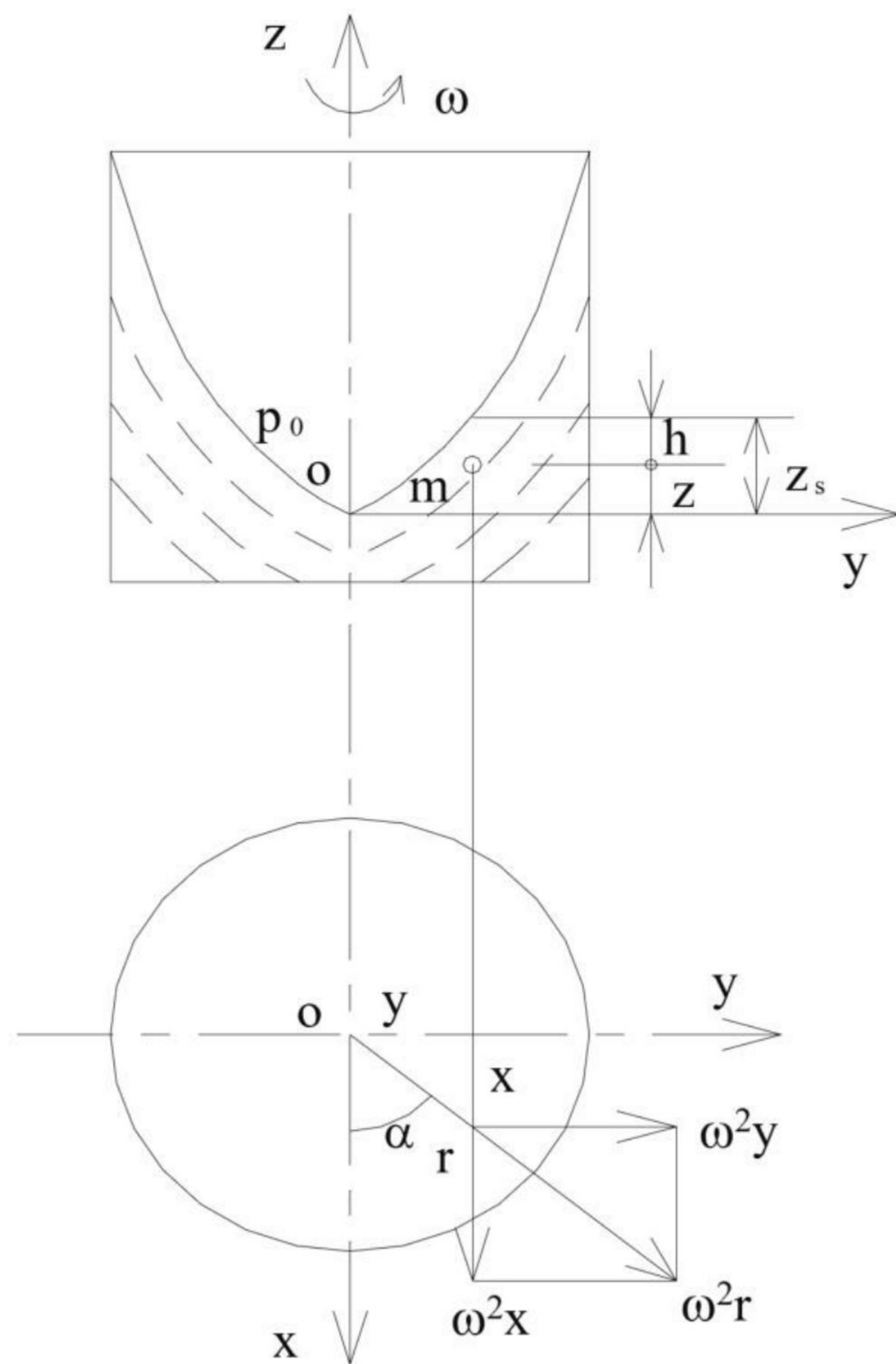
(1) 等压面

- 绝对静止: $z = c$ 水平面
- 相对静止: $\frac{\omega^2 r^2}{2} - gz = C$ 旋转抛物面

(2) 压强分布

- 绝对静止: $p = p_0 + \rho gh$
- 相对静止:

$$p = p_0 + \rho g (z_s - z) = p_0 + \rho gh$$
 h 为任一点距离自由液面的淹深



液体在非惯性系中的相对平衡：例题

例6: 装在做水平匀加速直线运动物体上的 U 型管式加速度测定器, 如下图所示。测得两管内液面高度差 $h = 4 \text{ cm}$, 两管相距 $l = 20 \text{ cm}$, 求该物体的加速度 a 。

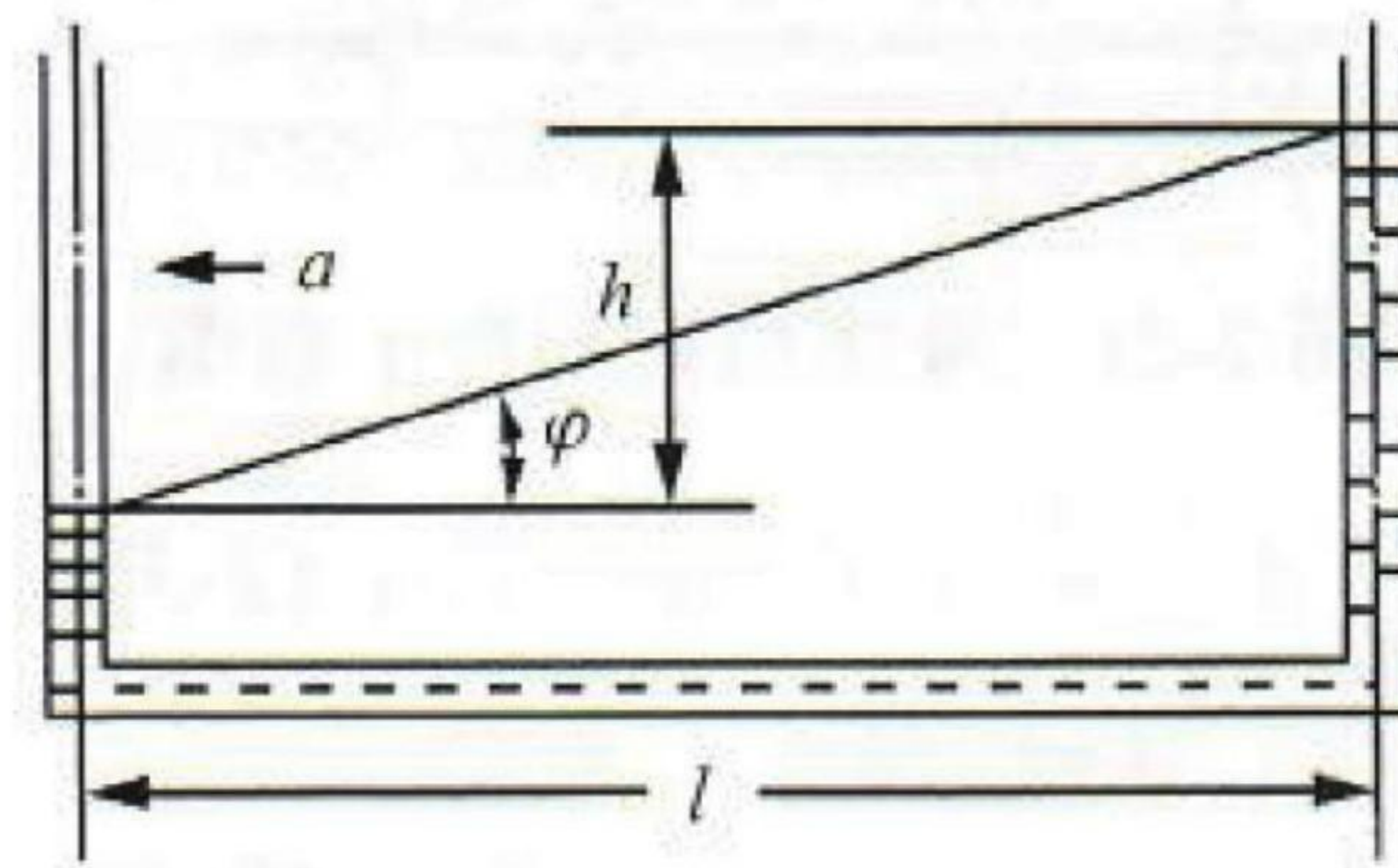
解: 当 U 型管与物体一起在水平方向做匀加速直线运动时, 其两管内自由液面的连线与水平面的夹角 φ 就是等压面的倾斜角。

根据匀加速水平直线运动等压平面簇与水平面夹角公式得

$$\tan \varphi = \frac{a}{g} = \frac{h}{l}$$

所以

$$a = \frac{h}{l} g = \frac{4}{20} \times 9.81 = 1.962 \text{ (m/s}^2\text{)}$$



液体在非惯性系中的相对平衡：例题

例7: 一个咖啡杯直径 6 cm, 深度为 10 cm, 静止时盛有密度为 1010 kg/m^3 、深度为 7 cm 的咖啡, 如图所示. 问: (1) 如果将咖啡杯放在一个小车上, 以 7 m/s^2 的加速度沿水平方向做匀加速直线运动, 咖啡是否会溢出? (2) 杯底部 A 点在静止和匀加速直线运动时的表压是多少?

解: (1) 根据匀加速水平直线运动等压平面簇与水平面夹角公式得

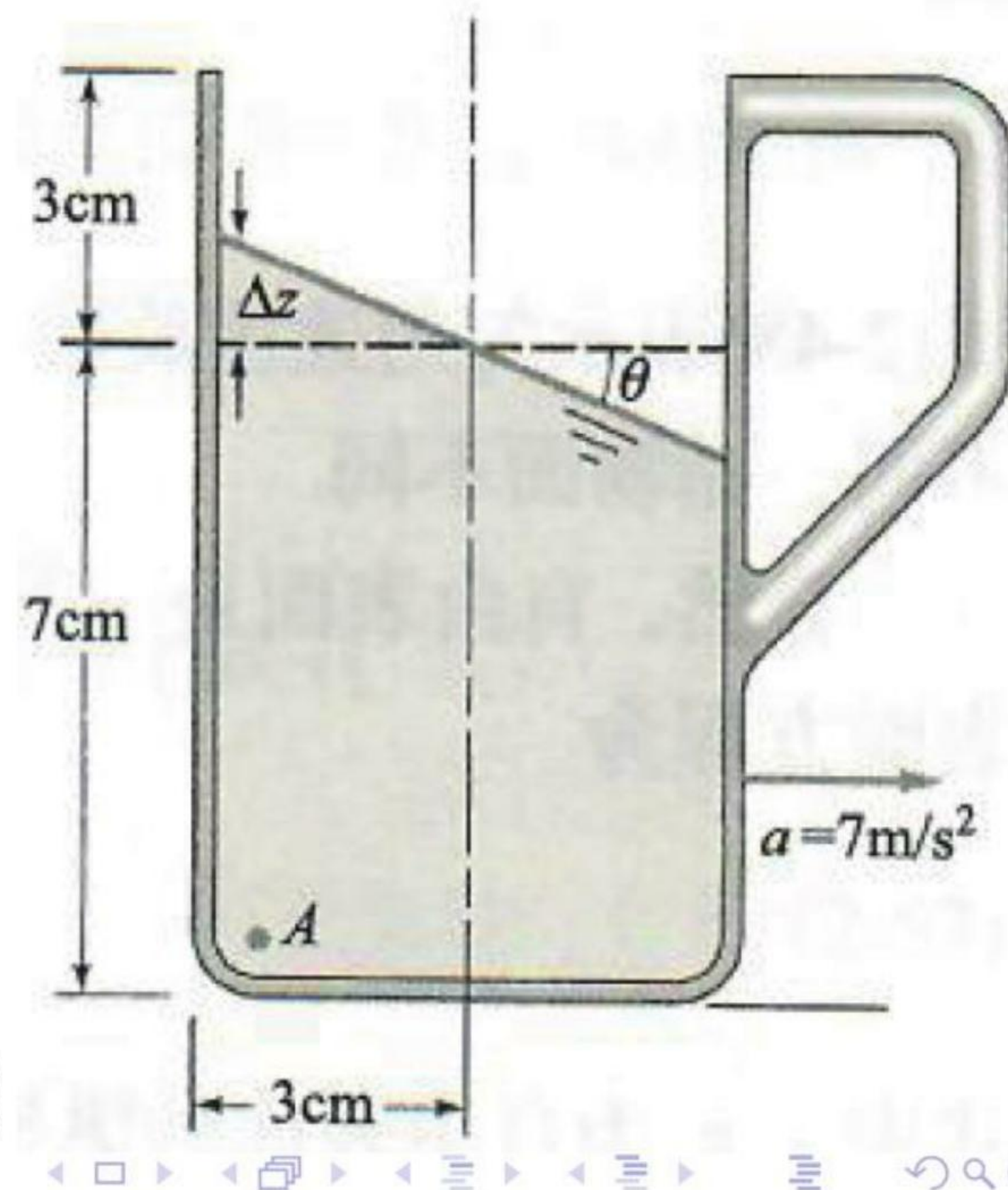
$$\theta = \arctan \frac{a}{g} = \arctan \frac{7.0}{9.81} = 35.5^\circ \Rightarrow \text{不会溢出}$$

$$\Delta z = (3 \text{ cm})(\tan \theta) = 2.14 \text{ cm} < 3 \text{ cm}$$

(2) 静止时 $p_A = \rho g h = 1010 \times 9.81 \times 0.07 = 694 \text{ (Pa)}$

匀加速运动时

$$p'_A = \rho g (z_s - z_A) = 1010 \times 9.81 \times (0.0214 + 0.07) = 905.6 \text{ (Pa)}$$



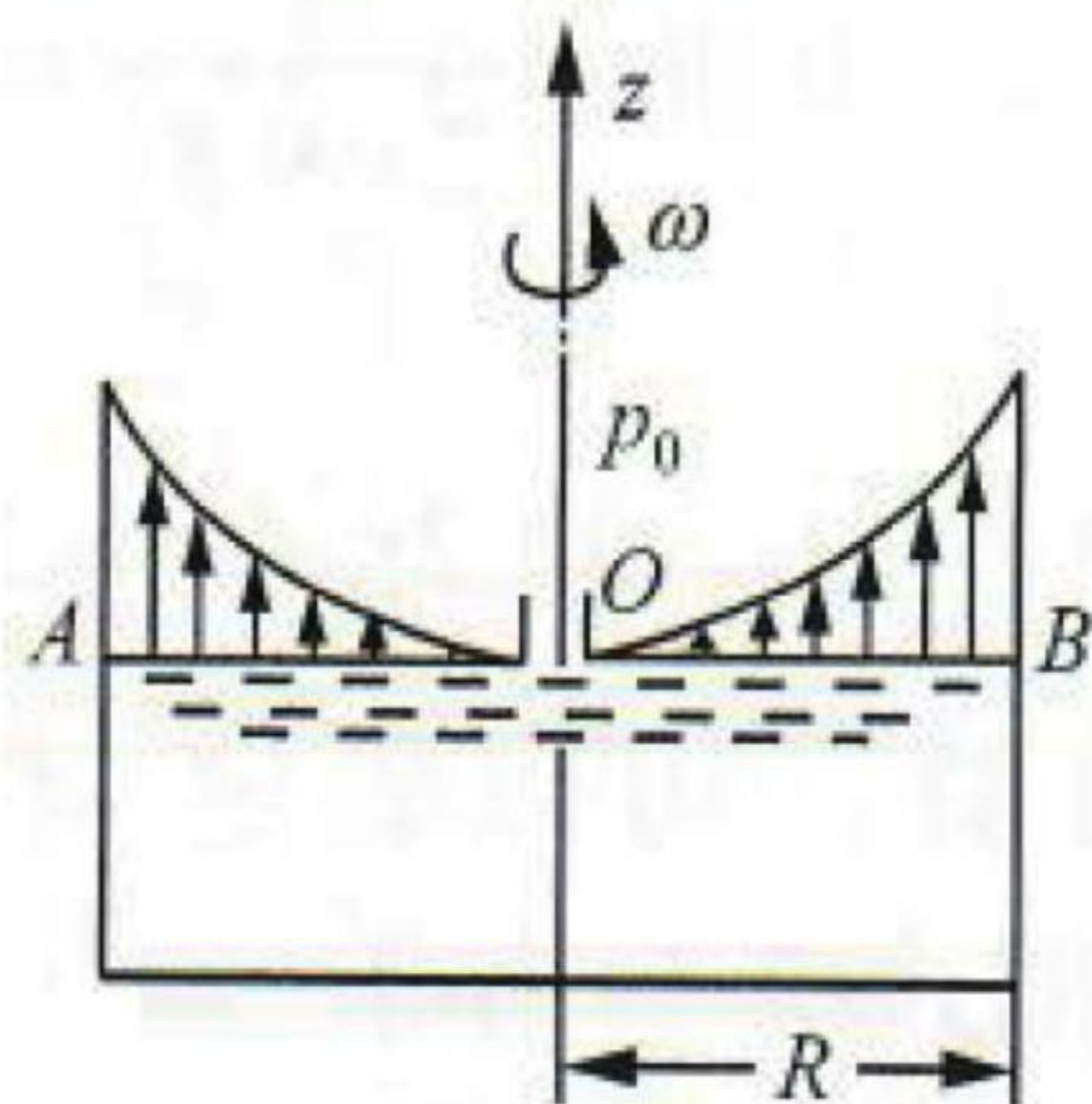
液体在非惯性系中的相对平衡：例题

例8: 如图 2-26 所示, 试推导装满液体的圆柱形容器在下述条件下绕垂直轴做匀速度旋转时的压强表达式: (1) 容器的顶盖中心处开口; (2) 容器的顶盖边缘处开口。

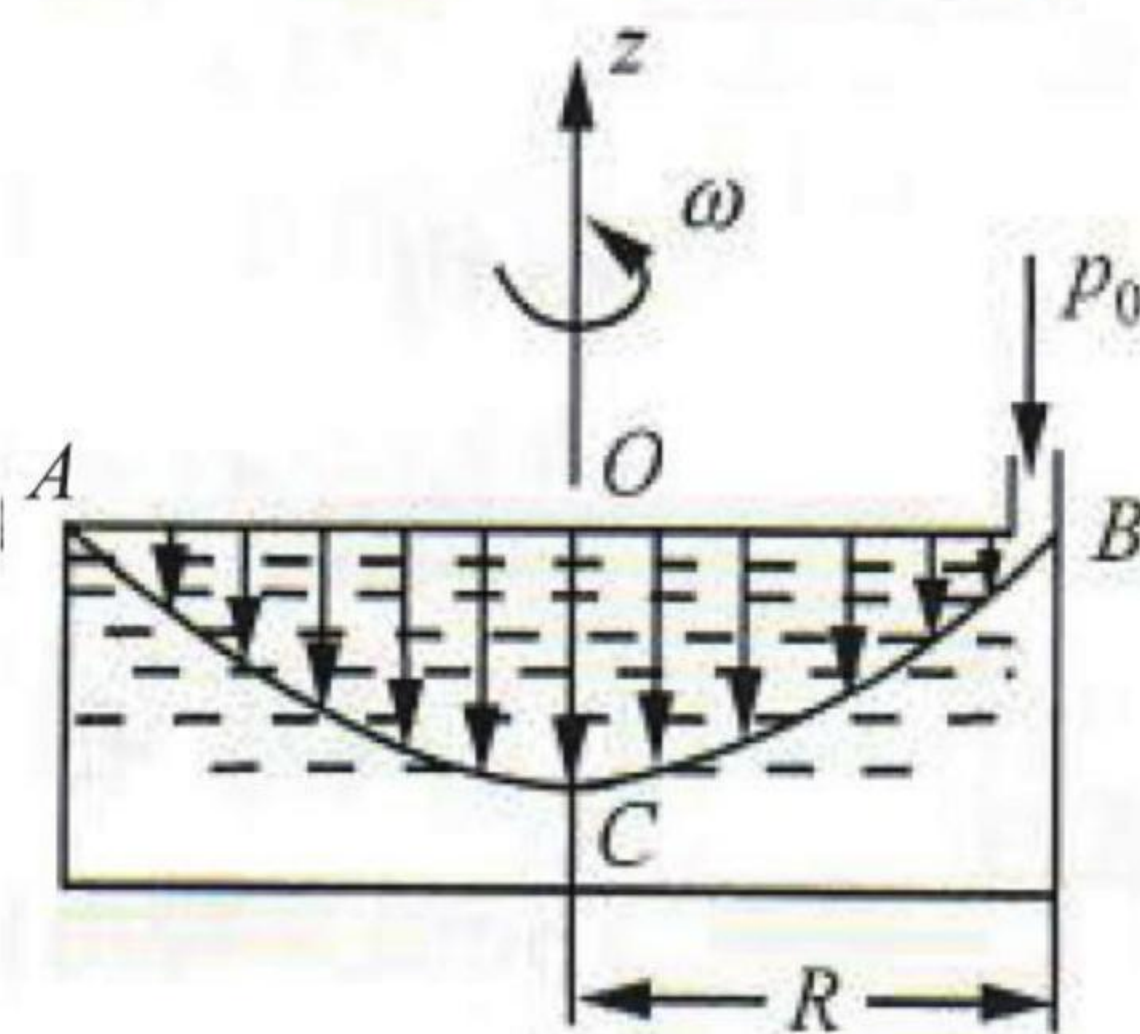
解:

分析

若充满液体的闭口容器做匀角速度旋转, 则液面受容器顶部限制不能自由成形, 但器顶部液体压强的变化规律仍和未充满液体的开口容器做匀角速度旋转的情况相同。



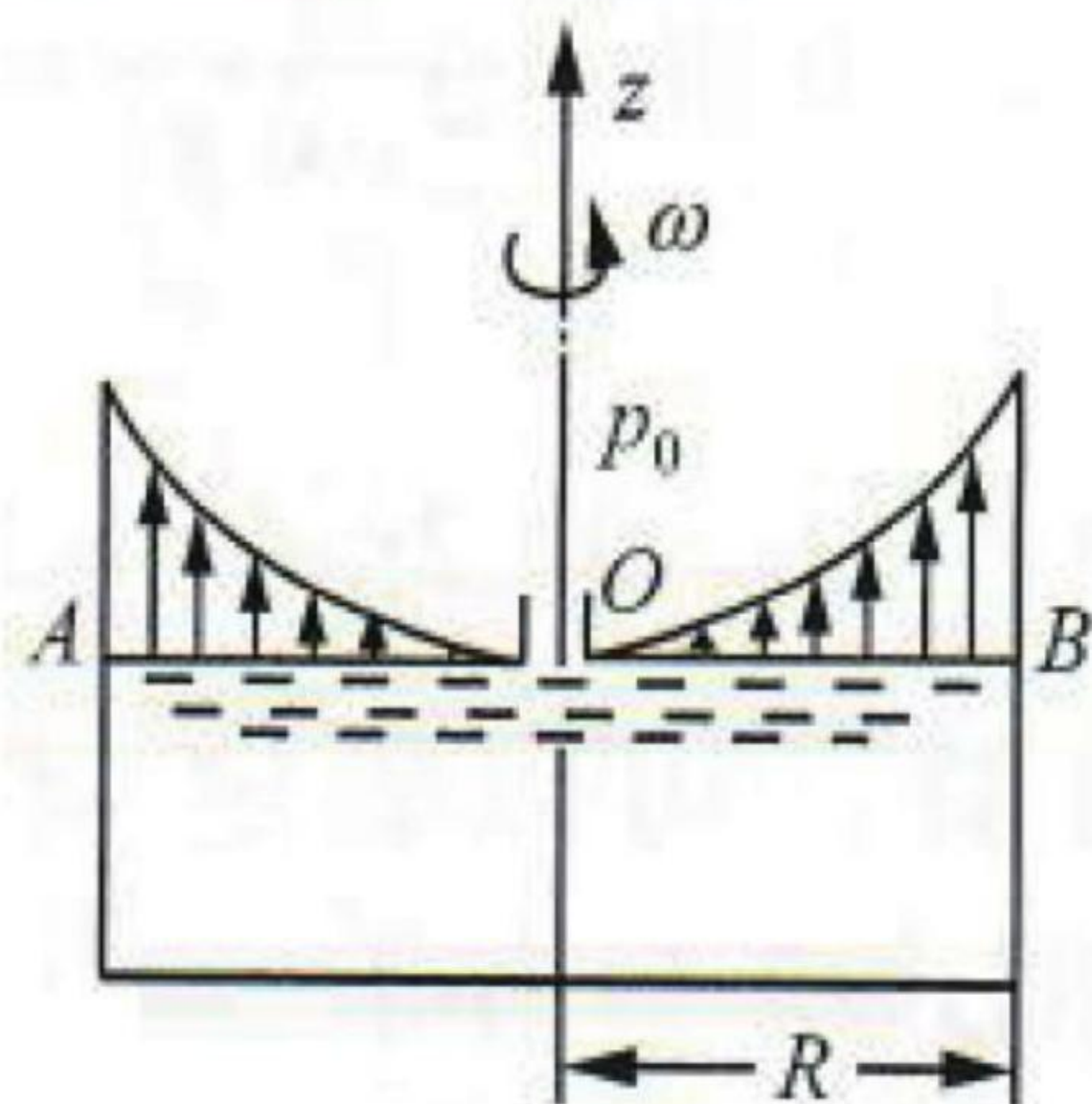
(a) 顶盖中心开口的容器



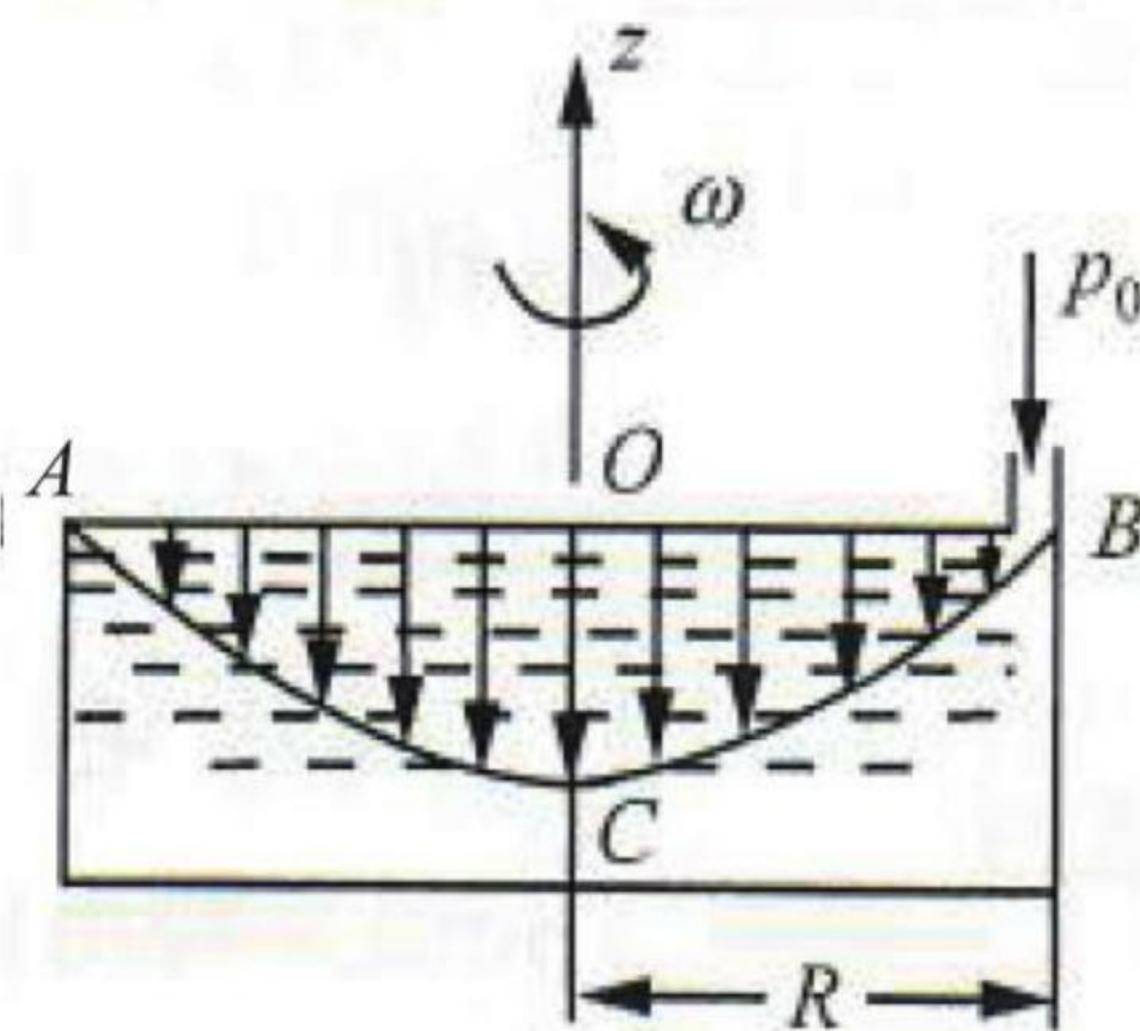
(b) 顶盖边缘开口的容器

液体在非惯性系中的相对平衡：例题

例8: 如图 2-26 所示, 试推导装满液体的圆柱形容器在下述条件下绕垂直轴做匀速度旋转时的压强表达式: (1) 容器的顶盖中心处开口; (2) 容器的顶盖边缘处开口。



(a) 顶盖中心开口的容器



(b) 顶盖边缘开口的容器

解: (1) 顶盖中心处开口. 当 $r = 0, z = 0$ 时, 将 $p = p_0$ 代入**旋转液体中静压强分布公式**得 $C = p_0$, 于是

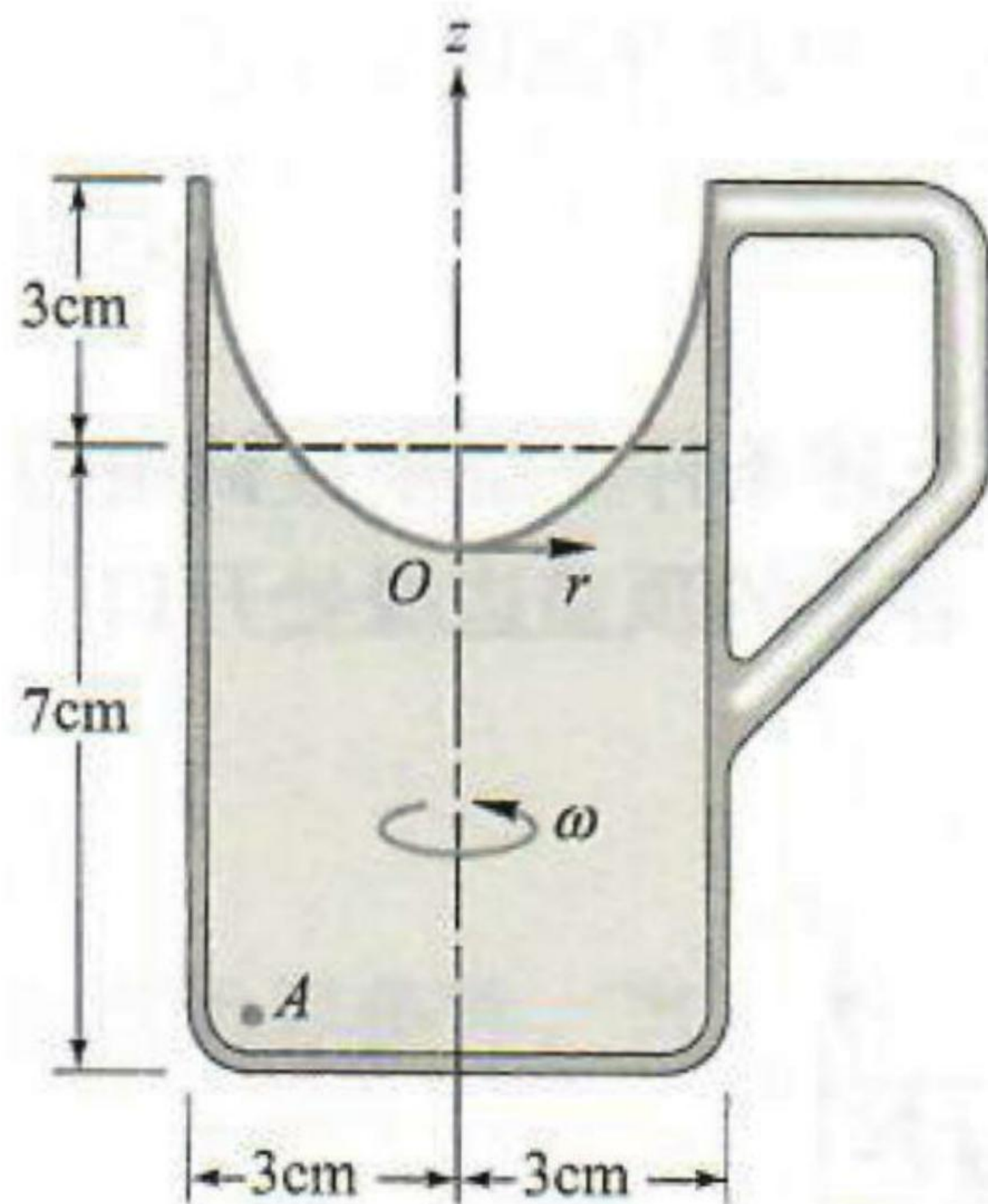
$$p = p_0 + \rho g \left(\frac{\omega^2 r^2}{2g} - z \right)$$

(2) 顶盖边缘处开口. 当 $r = R, z = 0$ 时, 将 $p = p_0$ 代入**旋转液体中静压强分布公式**得 $C = p_0 - \rho g \frac{\omega^2 R^2}{2g}$, 于是

$$p = p_0 - \rho g \left[\frac{\omega^2 (R^2 - r^2)}{2g} + z \right]$$

液体在非惯性系中的相对平衡：例题

例9: 如果将例 2-7 中的咖啡杯放在一个转盘上旋转, 形成如图 2-27 所示的运动状态, 问: (1) 角速度 ω 为多少时咖啡刚好达到杯沿? (2) 此时杯底部 A 点的表压是多少?。



解: (1) 将坐标原点建立在液面最低处, 如图所示. 此时, 旋转抛物体的体积等于同底同高圆柱体体积的一半, 所以

$$\frac{1}{2}\pi R^2 \cdot z_s = \pi R^2 \cdot 0.03$$

解得

$$z_s = 0.06 \text{ m}$$

根据自由表面方程得

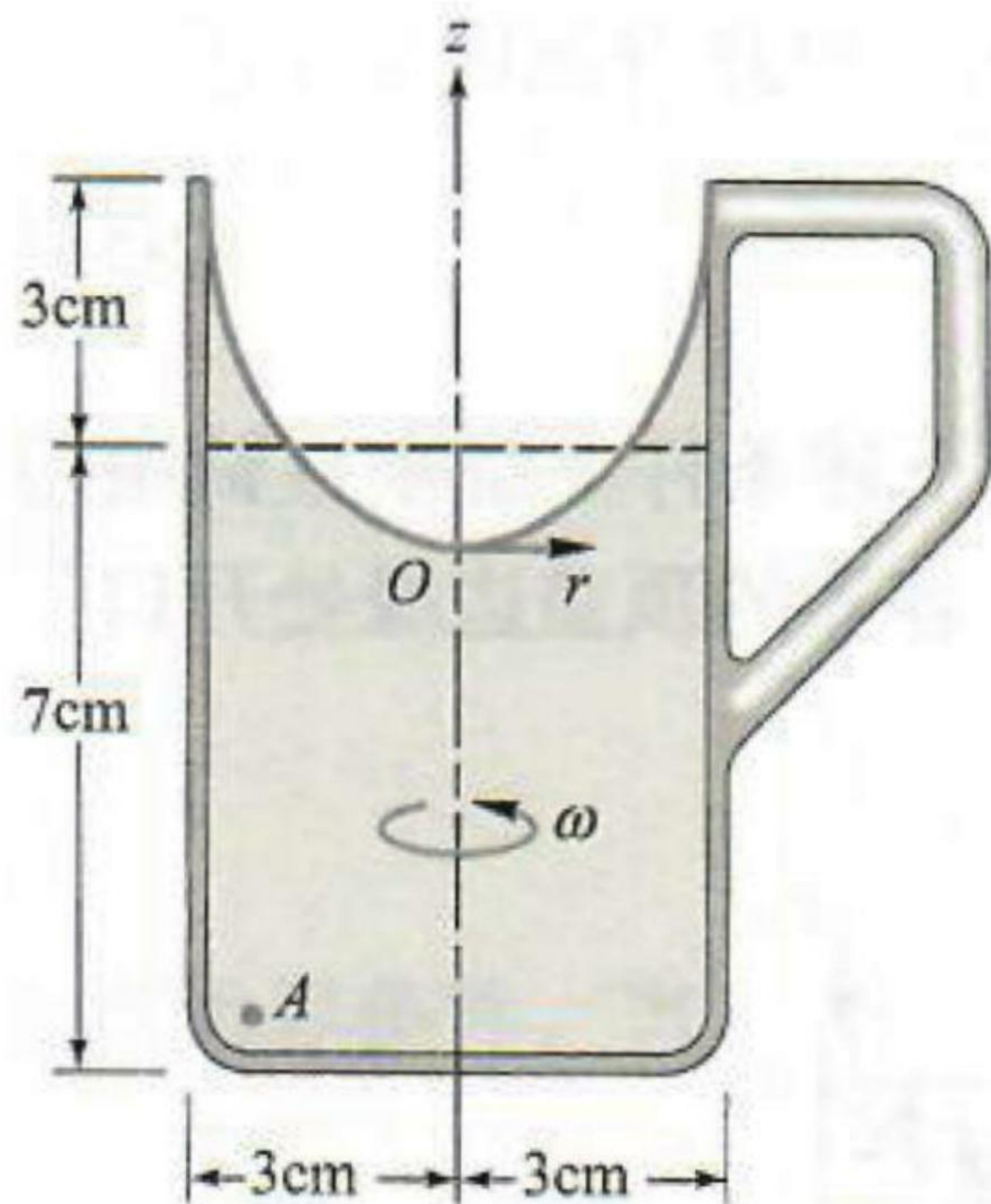
$$0.06 = \frac{\omega^2}{2 \times 9.81} \times 0.03^2$$

解得

$$\omega = 36.2 \text{ rad/s} = 346 \text{ r/min}$$

液体在非惯性系中的相对平衡：例题

例9: 如果将例 2-7 中的咖啡杯放在一个转盘上旋转, 形成如图 2-27 所示的运动状态, 问: (1) 角速度 ω 为多少时咖啡刚好达到杯沿? (2) 此时杯底部 A 点的表压是多少?。



解: (2) 根据前面计算, 可以确定 A 点的坐标 $(r, z) = (3 \text{ cm}, -4 \text{ cm})$. 由**匀角速度旋转容器中静压强分布公式**得

$$\begin{aligned} p_A - p_0 &= -\rho g z_A + \frac{1}{2} \rho r_A^2 \omega^2 \\ &= -1010 \times 9.81 \times (-0.04) \\ &\quad + \frac{1}{2} \times 1010 \times 0.03^2 \times 36.2^2 = 991 \text{ (Pa)} \end{aligned}$$

此题还可根据**静止流体中静压强分布公式**计算

$$\begin{aligned} p_A - p_0 &= \rho g h = \rho g (z_s - z_A) \\ &= 1010 \times 9.81 \times (0.03 + 0.07) = 991 \text{ (Pa)} \end{aligned}$$

主要内容

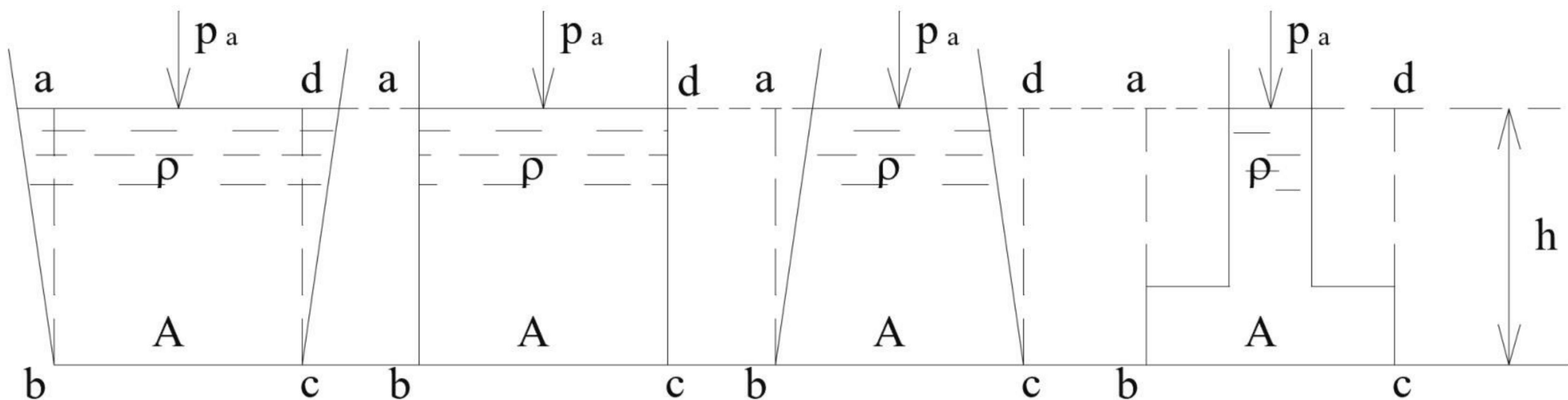
- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力**
- ⑦ 总结与思考

一、水平面上的液体总压力

各点压强大小：处处相等

各点压强方向：方向一致

$$F = p_e A = \rho g h A$$



二、倾斜平面上的液体总压力

各点压强大小：处处不等

各点压强方向：方向一致

① 总压力的方向

总压力的方向垂直于受压的平面

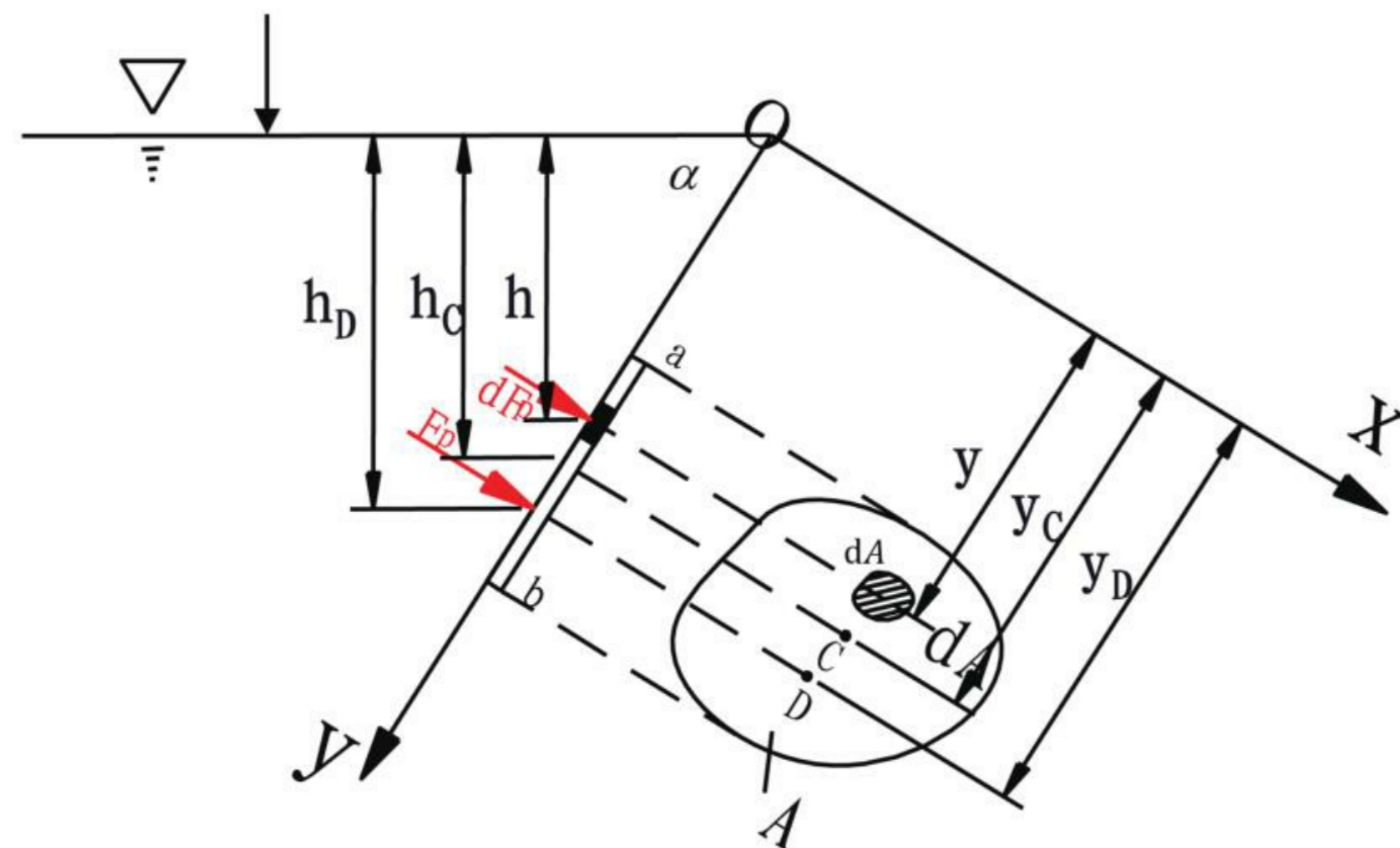
② 总压力的大小

作用在微分面积 dA 上的压力：

$$dF_p = p dA = \rho g h dA = \rho g (y \sin \alpha) dA$$

作用在平面 A 上的总压力：

$$F_p = \int_A dF_p = \rho g \sin \alpha \int_A y dA$$



二、倾斜平面上的液体总压力

作用在平面 ab 上的总压力:

$$F_p = \int_A dF_p = \rho g \sin \alpha \int_A y dA$$

由工程力学知 $\int_A y dA = y_c A$

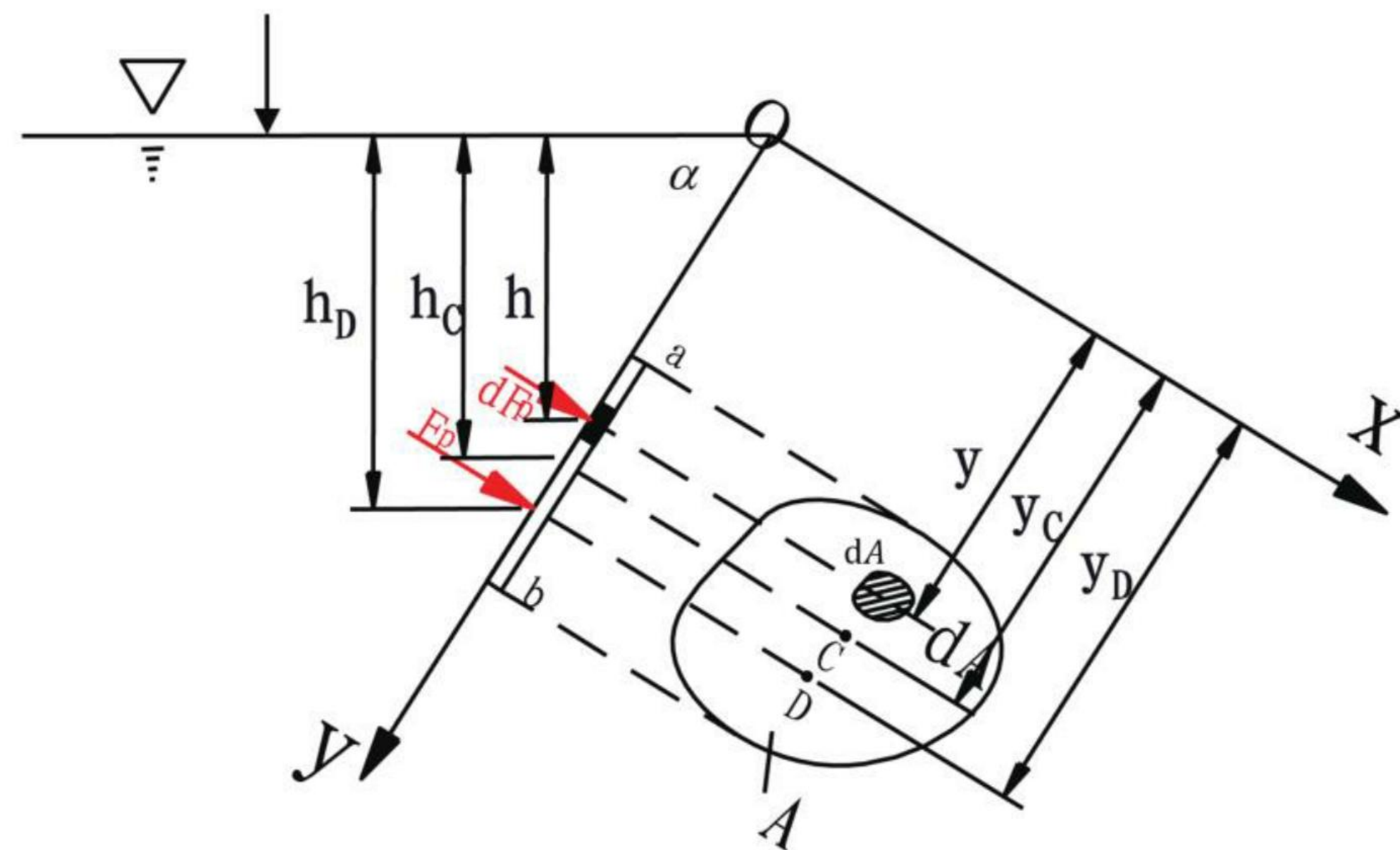
受压面面积 A 对 OX 轴的静矩, 故

$$F_p = \rho g (y_c \sin \alpha) A = \rho g h_c A$$

$$\uparrow \qquad \qquad \qquad = (p_c - p_0) A$$

$$h_c = y_c \sin \alpha$$

即静止液体作用在平面上的总压力等于受压面积与其形心处相对压强的乘积。



二、倾斜平面上的液体总压力

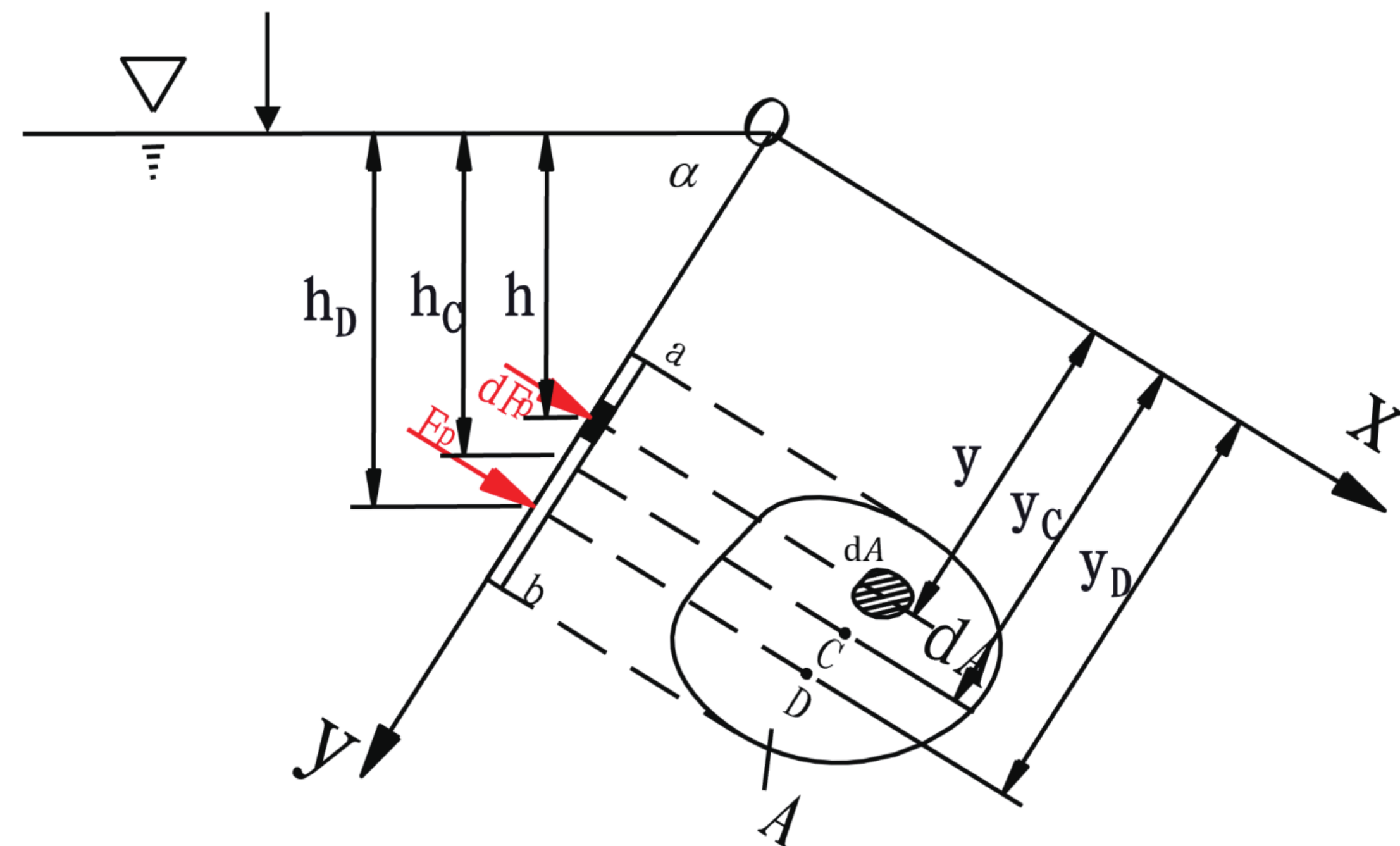
③ 总压力的作用点

合力矩定理：合力对某轴的矩等于各分力对同一轴的矩的代数和。

$$F_p \cdot y_D = \int dF_p \cdot y \Rightarrow$$

$$\rho g \sin \alpha \cdot y_C A \cdot y_D = \rho g \sin \alpha \int_A y^2 dA \Rightarrow$$

$$y_D = \frac{\int y^2 dA}{y_C A} = \frac{I_x}{y_C A} = y_C + \frac{I_{Cx}}{y_C A}$$

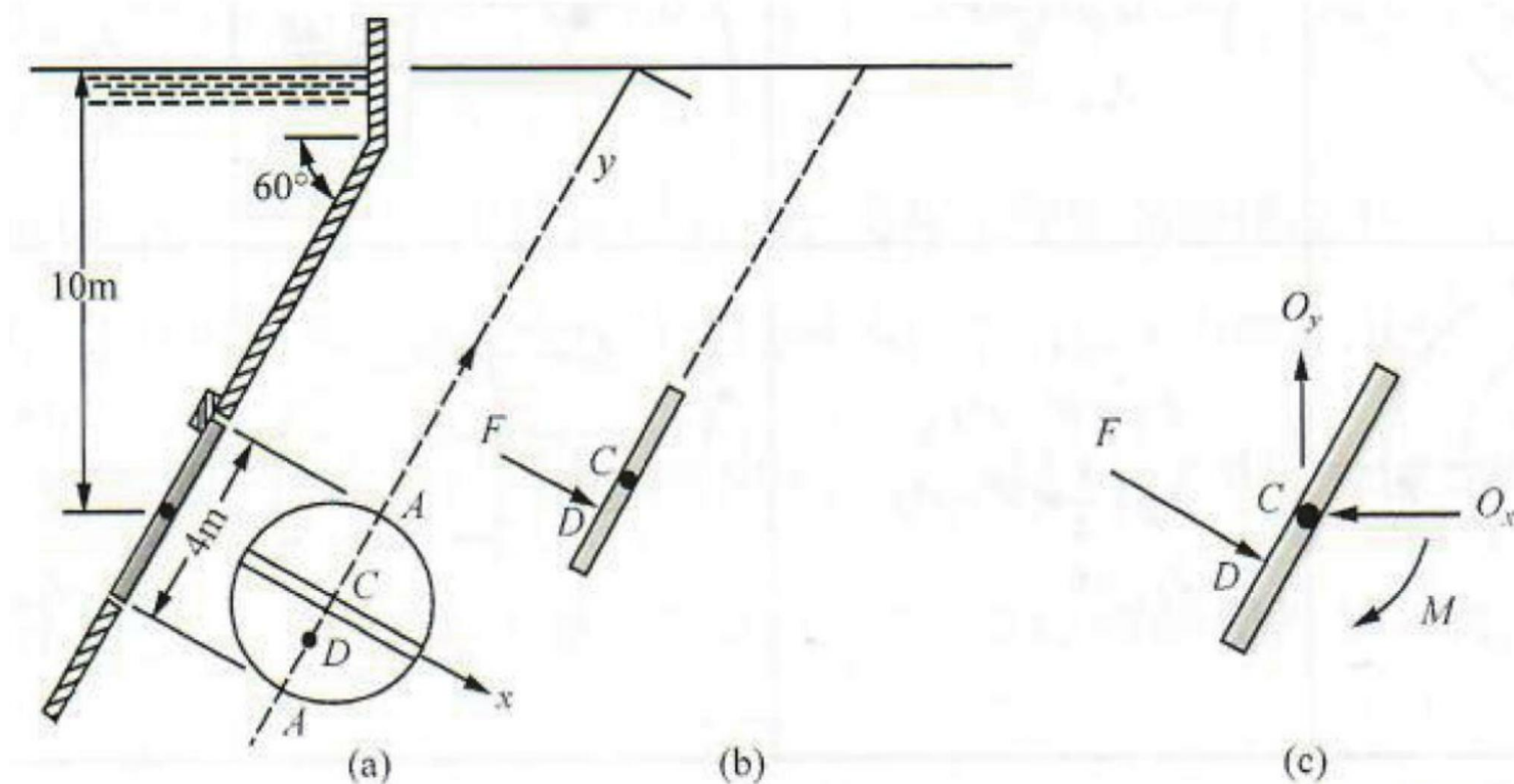


压力中心 D 必位于受压面形心 C 之下。

$\int_A y^2 dA = I_x$ 受压面 A 对 OX 轴的惯性矩。 I_{Cx} 受压面 A 对过形心点 C 且平行于 OX 轴的惯性矩。 **这与教材中的坐标不同**，故而公式在形式上不同。

二、倾斜平面上的液体总压力：例题

例11: 一个大型水库的倾斜壁面上有一个直径 4 m 的圆形闸门, 安装在穿过闸门直径的水平轴上, 如图所示. 当安装轴距液面水深 10 m 时, 试计算: (1) 水作用在闸门上的总压力大小及位置; (2) 打开闸门需要的力矩 (忽略闸门的重量)。



二、倾斜平面上的液体总压力：例题

解：(1) 水作用在闸门上的总压力如图(b)所示，应用液体产生的作用在平面上总压力公式，可以确定总压力的大小为

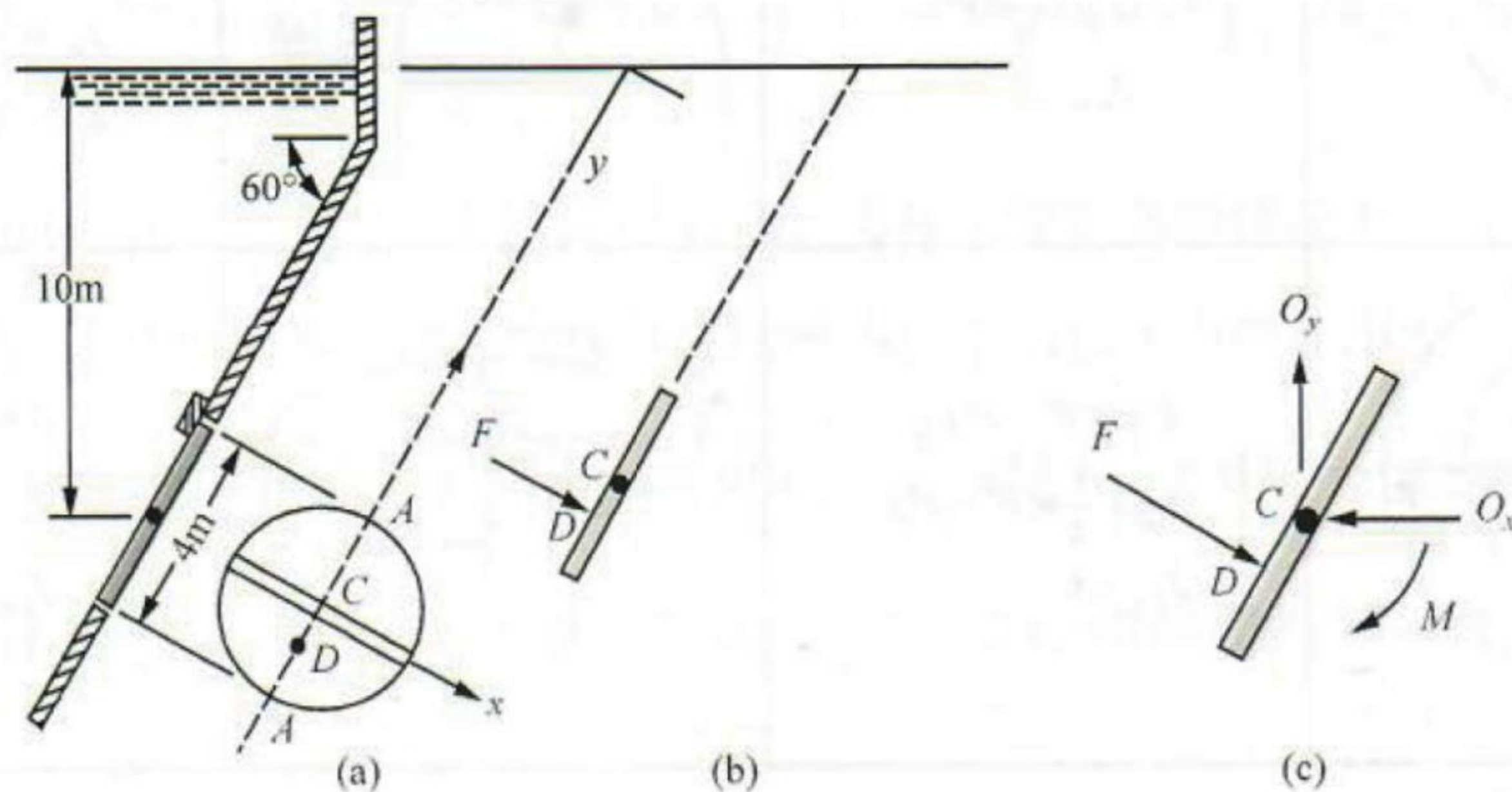
$$F = \rho g h_C A = 1000 \times 9.81 \times 10 \times \frac{\pi}{4} \times 4^2 = 1.23 \times 10^6 \text{ (N)}$$

总压力的作用点为

$$y_D = -\frac{\sin \theta J_{Cx}}{h_C \cdot A} = -\frac{\sin 60^\circ \pi R^4 / 4}{10 \cdot \pi R^2} = -0.0866 \text{ (m)}$$

(2) 对闸门受力分析如图(c)所示，若要打开闸门，需施加顺时针方向的力矩 M 使关于轴的合力矩为 0，即 $\sum M_C = 0$ ，所以

$$M = F \cdot |y_D| = 1.23 \times 10^6 \times 0.0866 = 1.07 \times 10^5 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$



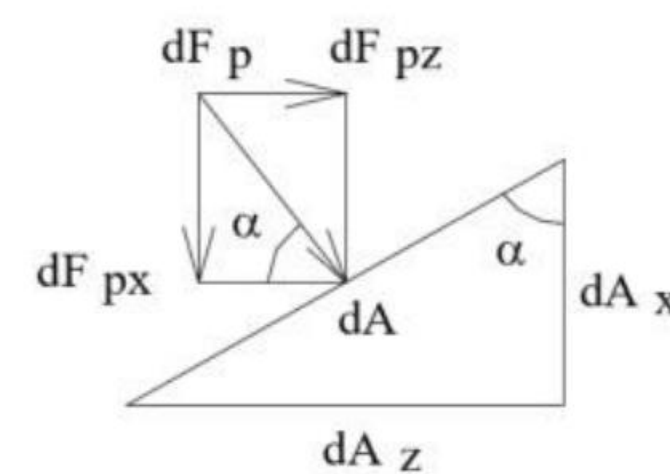
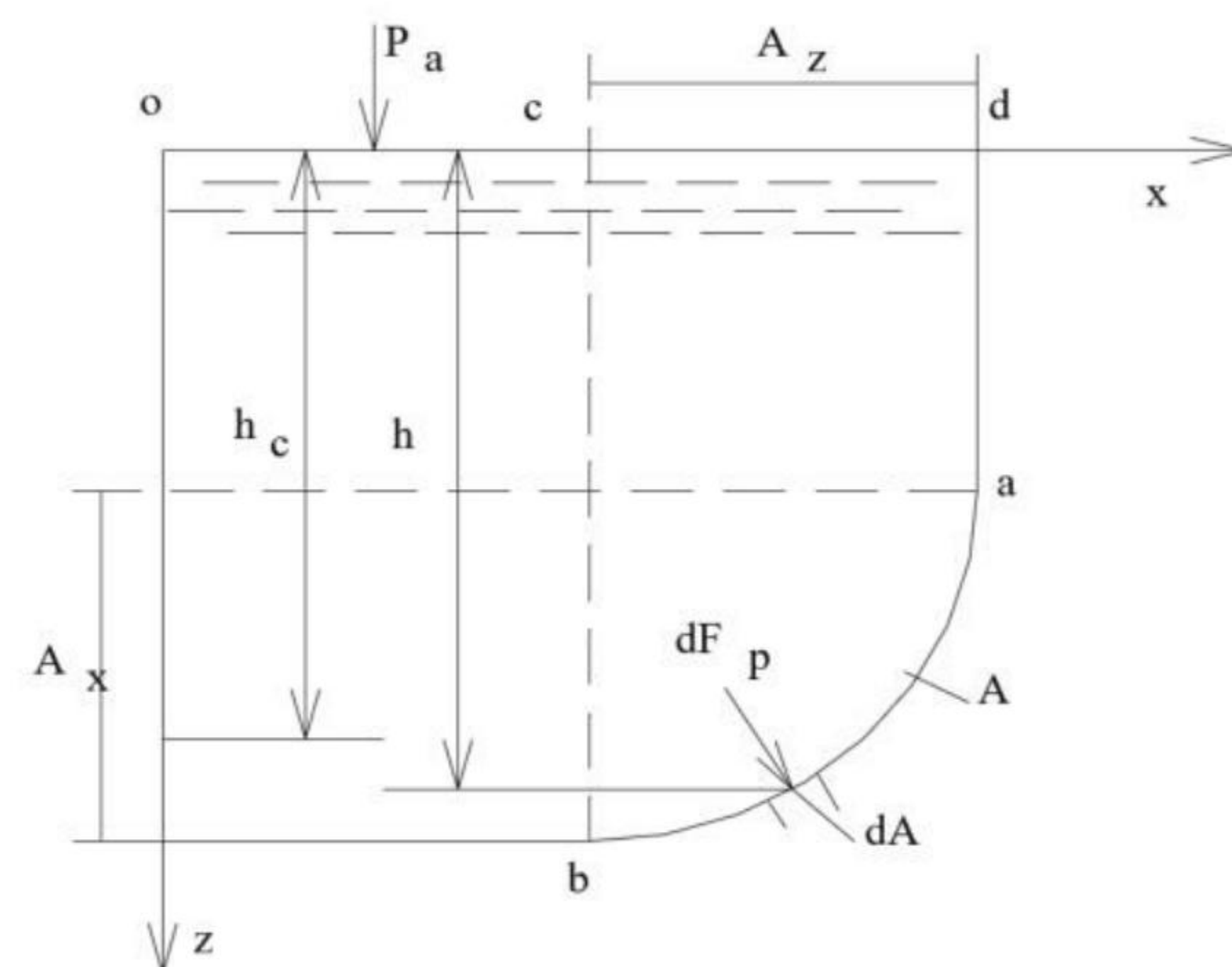
三、静止液体作用在曲面上的总压力

各点压强大小：大小不等

各点压强方向：方向不同

作用在微分面积 dA 上的压力：

$$dF_p = p dA = \rho g h dA$$



作用在曲面上的总压力为空间力系问题。

为便于分析，拟采用理论力学中的分解概念将其分解为水平分力和垂直分力求解。

三、静止液体作用在曲面上的总压力

① 水平分力

$$dF_{px} = dF_p \cdot \cos \alpha = \rho g h dA \cos \alpha$$

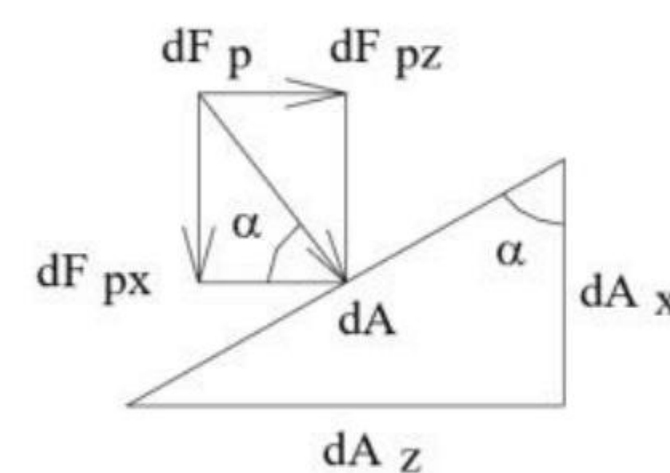
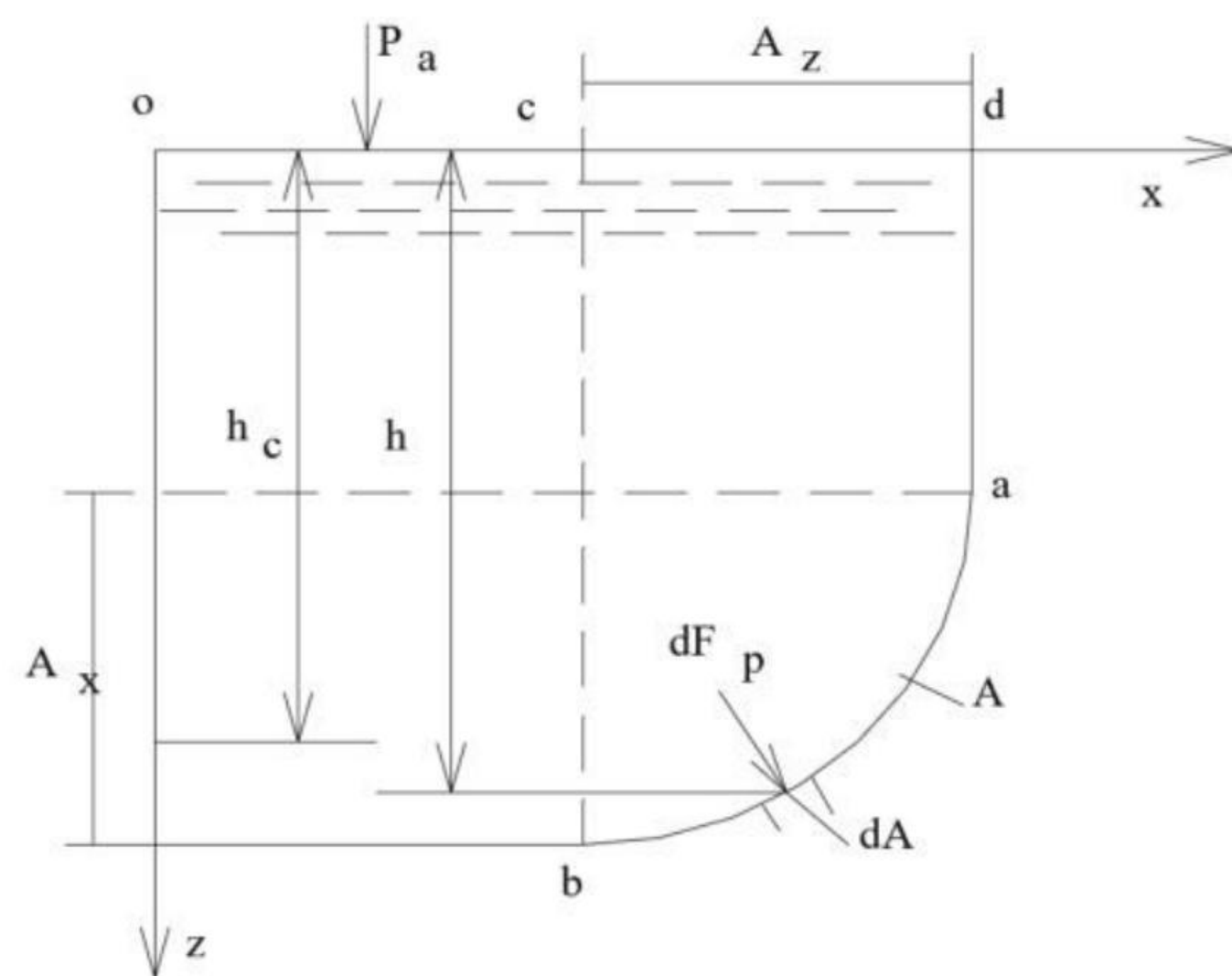
$$= \rho g h dA_x$$

↑

$$dA \cos \alpha = dA_x$$

$$F_{px} = \rho g \iint_{A_x} h dA_x = \rho g h_C A_x = (p_C - p_0) A_x$$

作用在曲面上的水平分力等于受压面形心处的相对压强 $p_C - p_0$ 与其在垂直坐标面 oyz 的投影面积 A_x 的乘积。



三、静止液体作用在曲面上的总压力

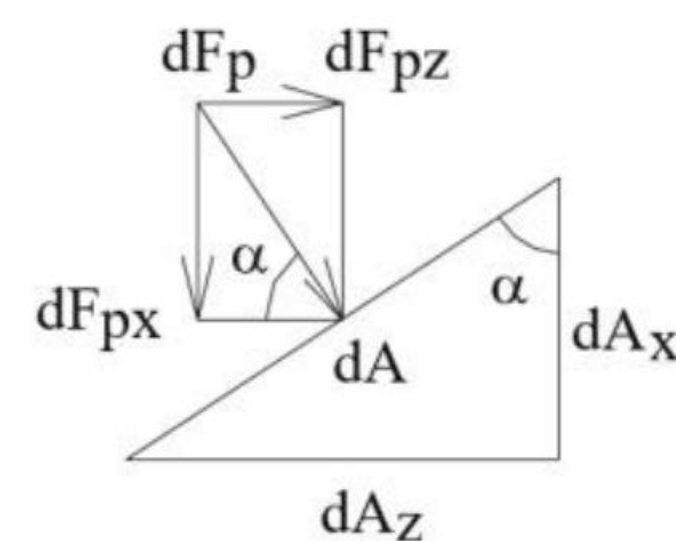
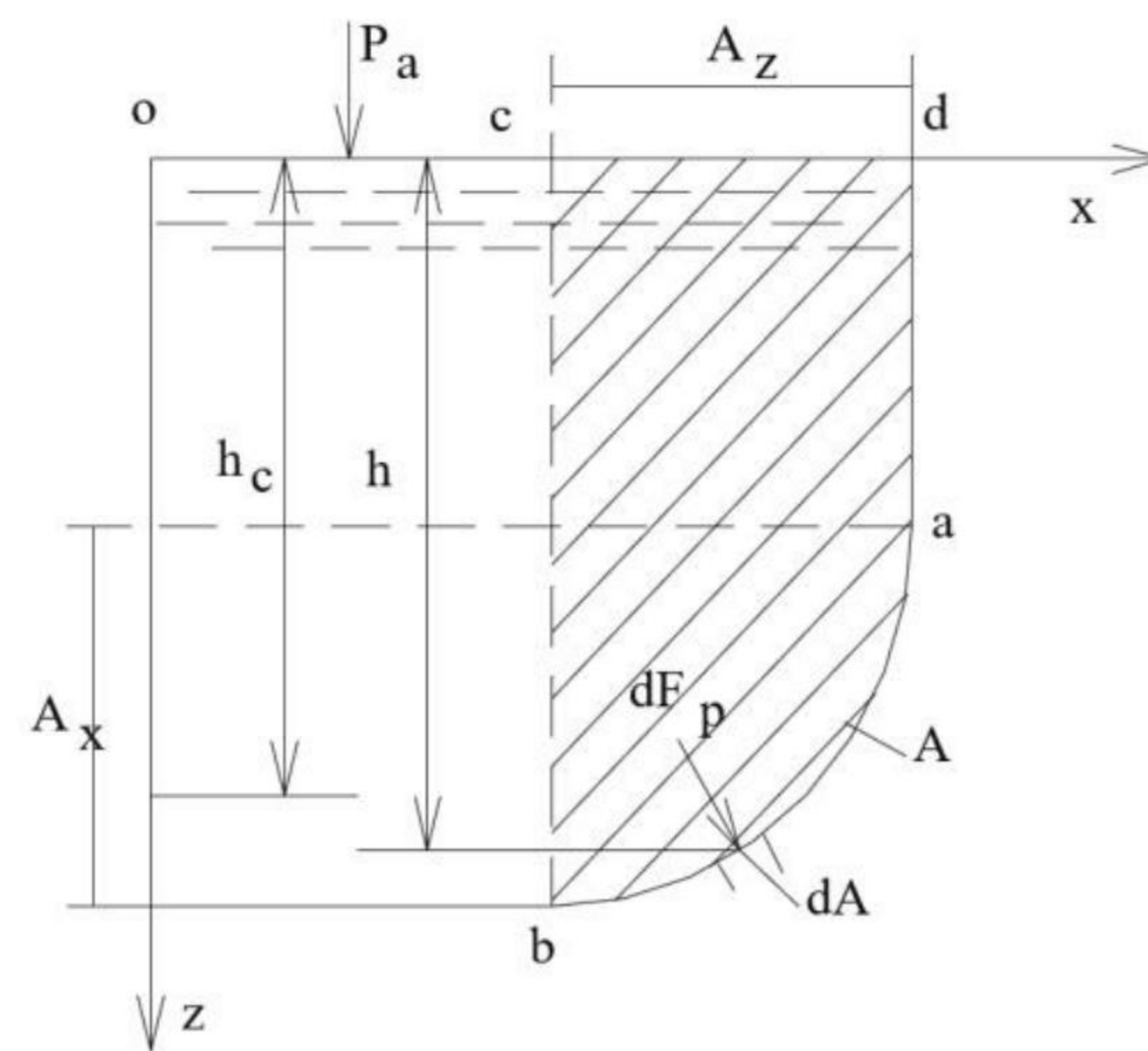
② 垂直分力

$$\begin{aligned} dF_{pz} &= dF_p \cdot \sin \alpha = \rho g h dA \sin \alpha \\ &= \rho g h dA_z \end{aligned}$$

↑

$$dA \sin \alpha = dA_z$$

$$F_{pz} = \rho g \iint_{A_z} h dA_z = \rho g V_p$$



式中: $V_p = \int_{A_z} h dA_z$, 为曲面 ab 上的液柱体积 $abcd$ 的体积, 称为压力体。

作用在曲线上的垂直分力等于压力体的液体重力。

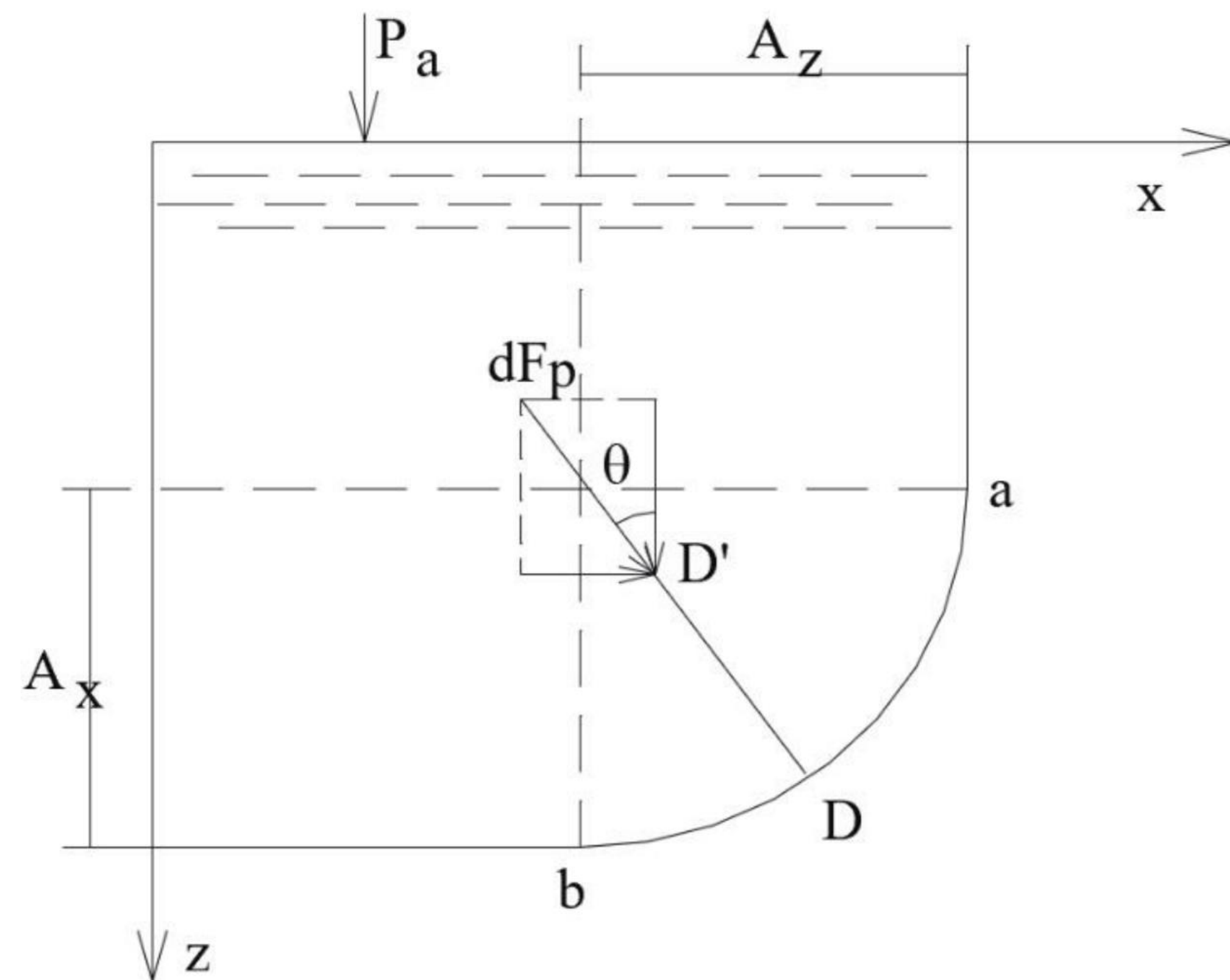
三、静止液体作用在曲面上的总压力

③ 总压力

大小: $F_p = \sqrt{F_{px}^2 + F_{pz}^2}$; 方向: 总压力与垂线间的夹角 $\tan \theta = \frac{F_{px}}{F_{pz}}$

总压力的作用点, 确定方法

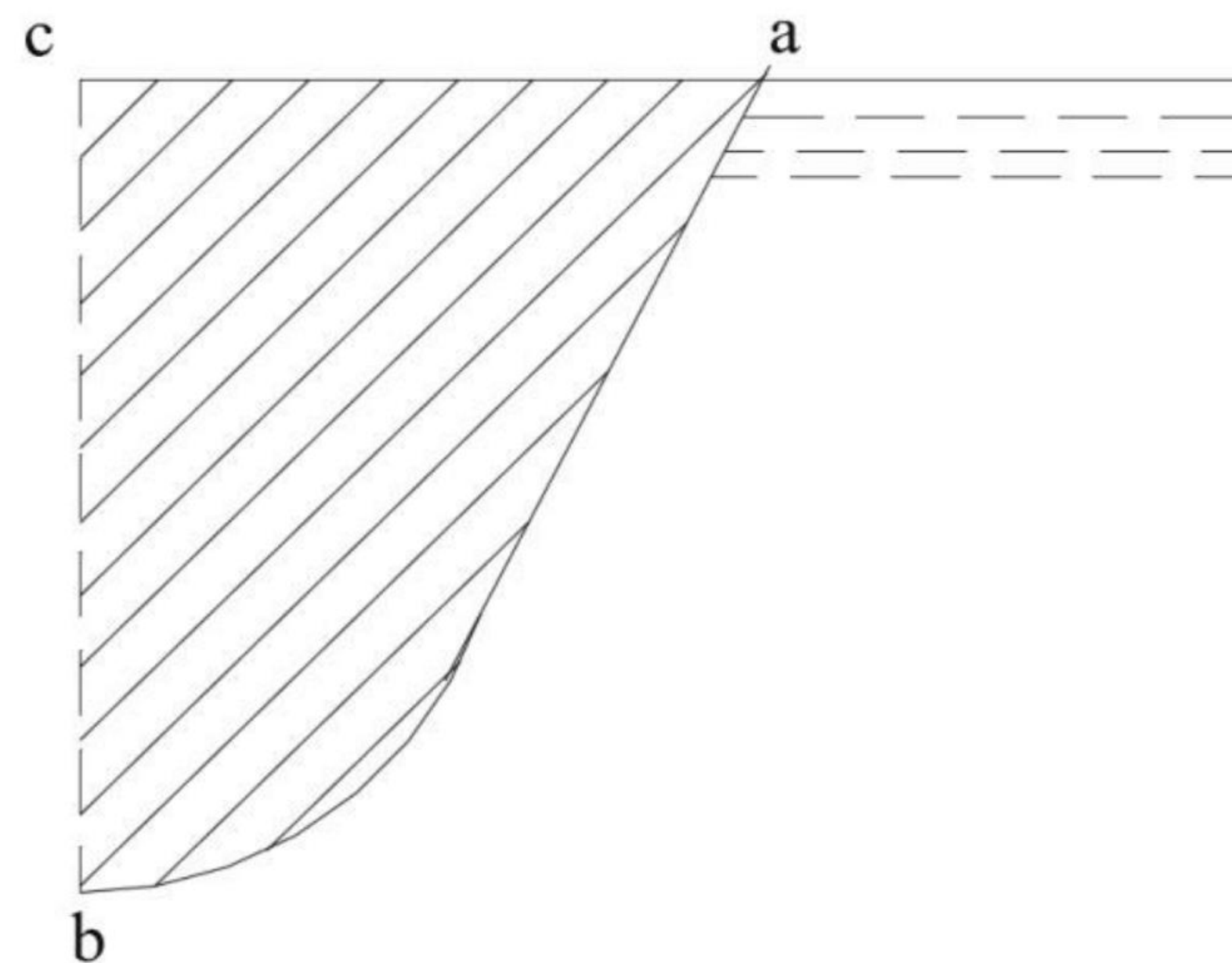
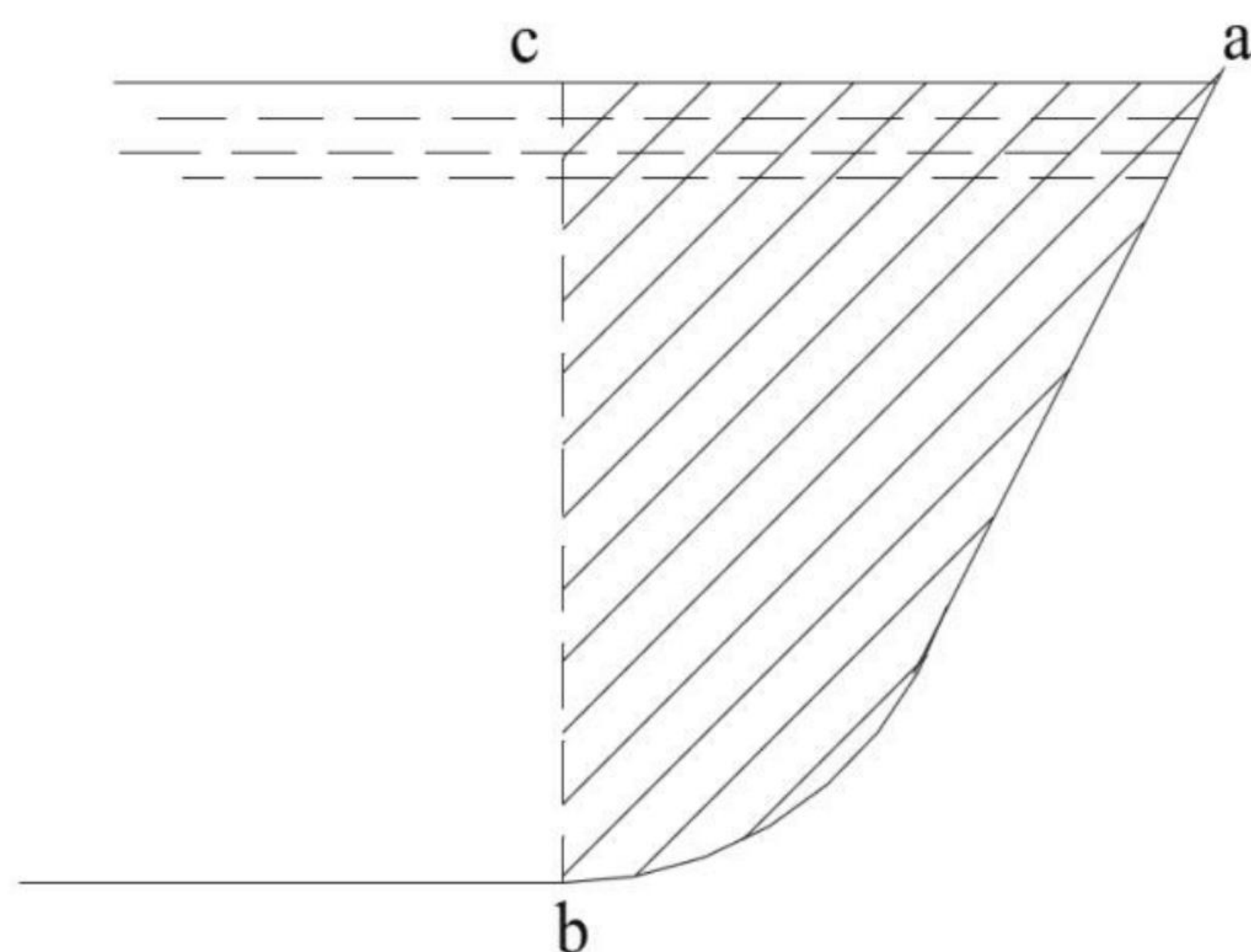
- 水平分力 F_{px} 的作用线通过 A_x 的压力中心;
- 铅垂分力 F_{pz} 的作用线通过 V_p 的重心;
- 总压力 F_p 的作用线由 F_{px} 、 F_{pz} 的交点和 $\theta = \tan^{-1} \frac{F_{px}}{F_{pz}}$ 确定;
- 将 F_p 的作用线延长至受压面, 其交点 D 即为总压力在曲线上的作用点。



三、静止液体作用在曲面上的总压力：压力体的两点说明

① 压力体的虚实性

压力体仅表示 $\int_{A_z} h \, dA_z$ 的积分结果 (体积), 与该体积内是否有液体存在无关。



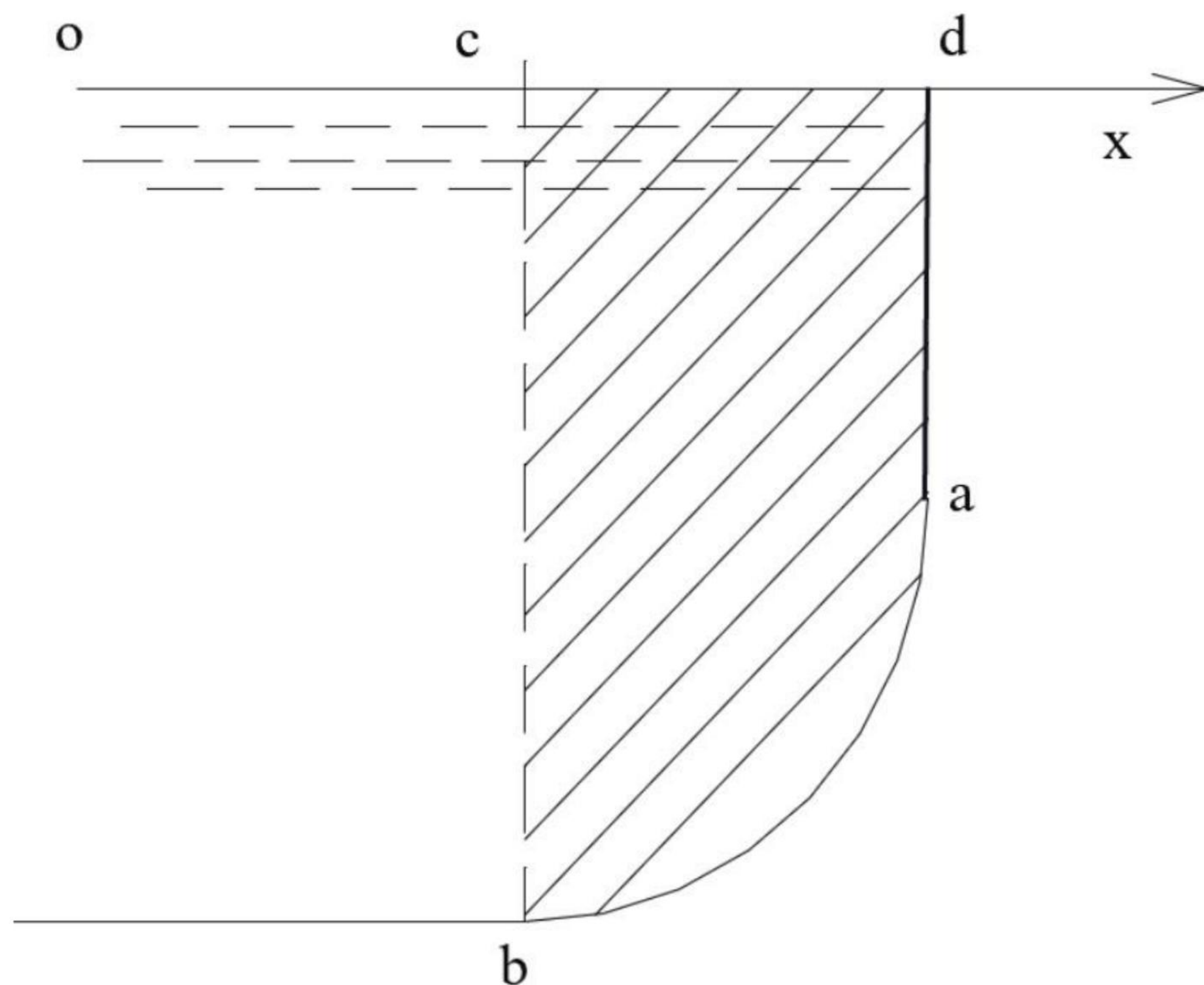
实压力体: 压力体 abc 包含液体体积, 垂直分力方向垂直向下。 虚压力体: 压力体 abc 不包含液体体积, 垂直分力方向垂直向上。

三、静止液体作用在曲面上的总压力：压力体的两点说明

② 压力体的组成

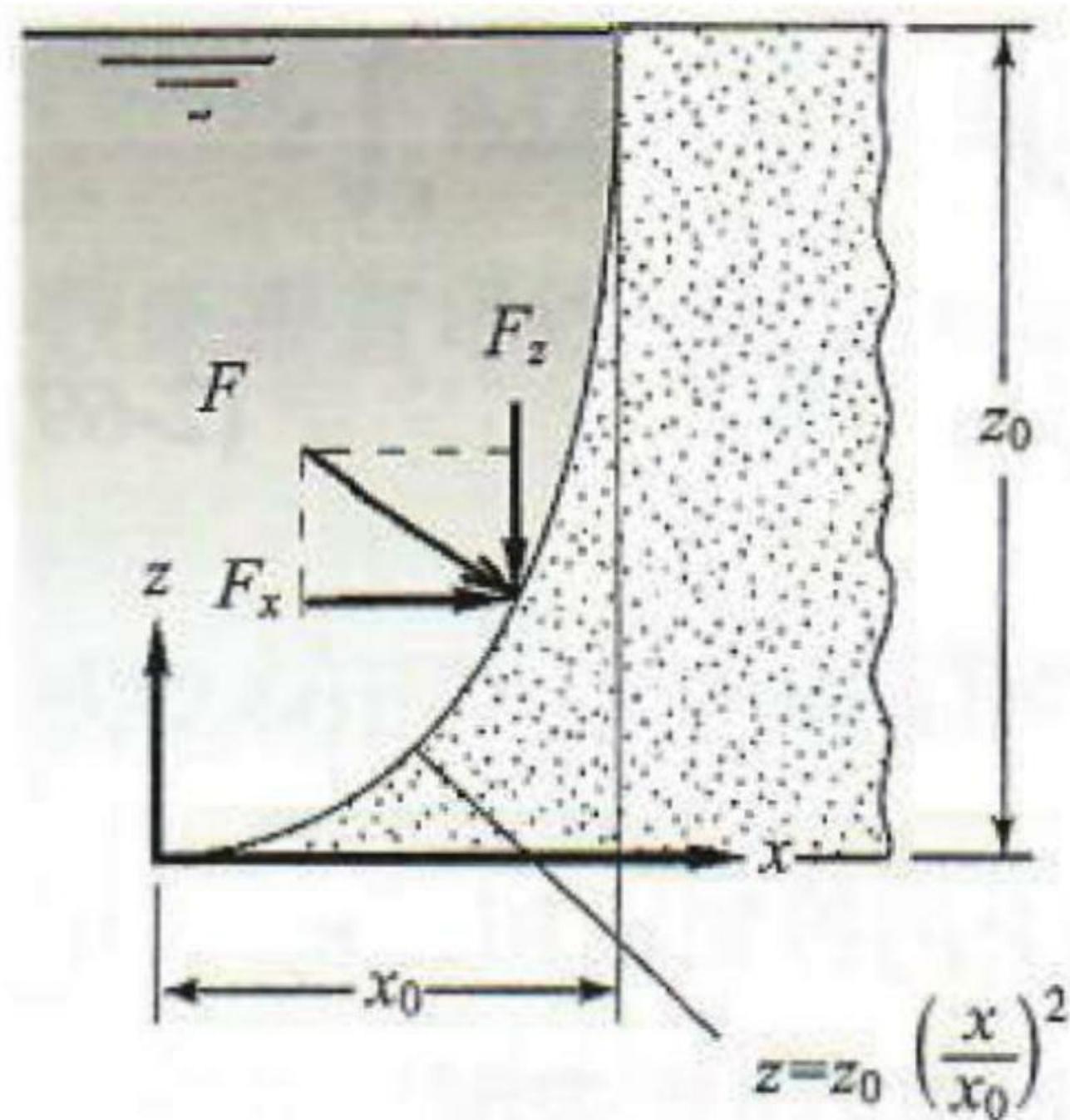
压力体一般是由三种面所围成的体积

- 压力体的底面：受压曲面
- 压力体的顶面：自由液面或自由液面的延长面
- 压力体的侧面：由受压曲面边界向自由液面或自由液面的延长面所作的铅垂柱面

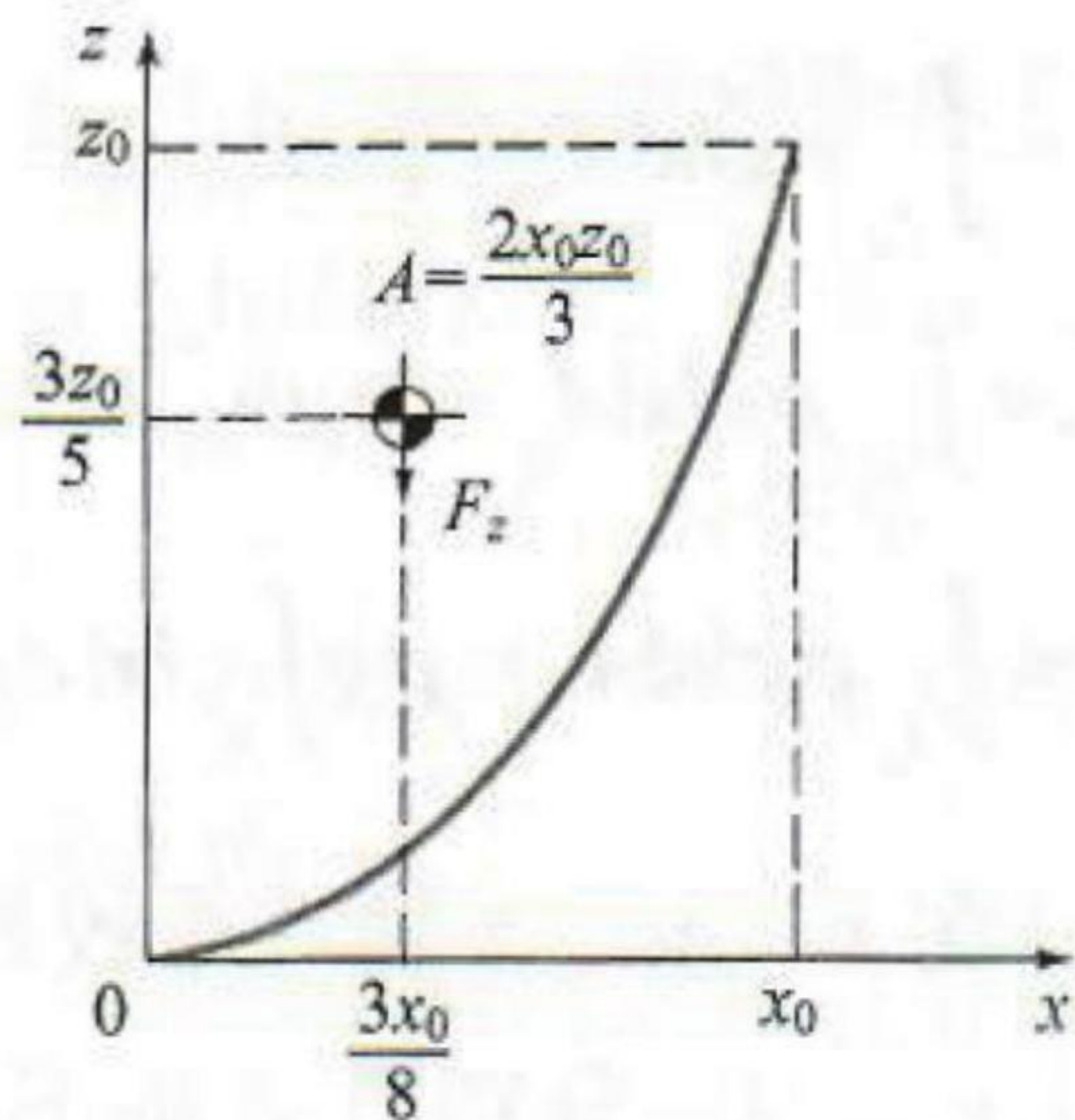


三、静止液体作用在曲面上的总压力：例题

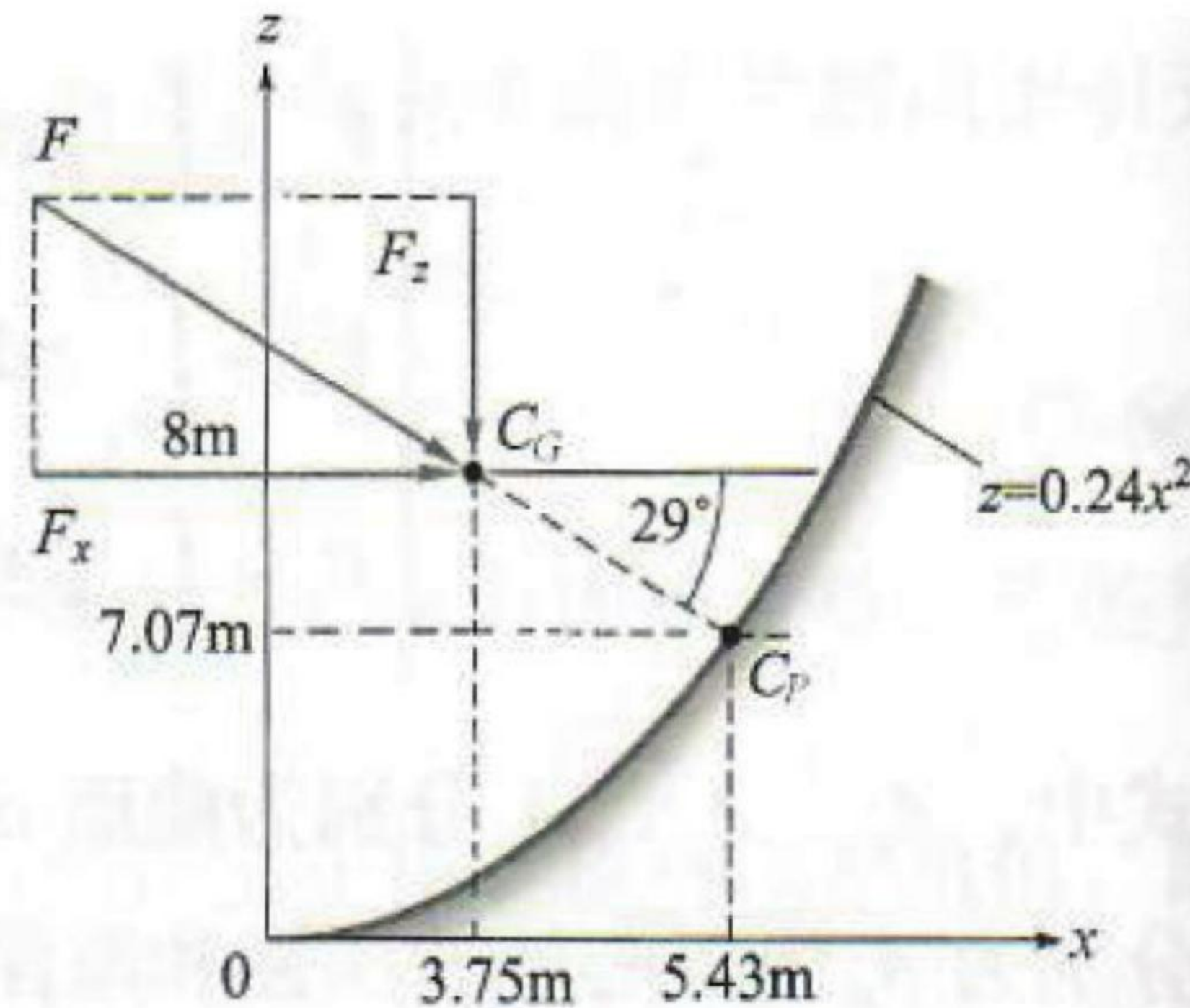
例12: 水坝横截面为抛物线形 $z = z_0 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2$ 。其中, $x_0 = 10 \text{ m}$, $z_0 = 24 \text{ m}$, 水坝宽 $b = 50 \text{ m}$ 。试求作用在水坝上的总压力大小和作用点。



(a)



(b)



(c)

三、静止液体作用在曲面上的总压力：例题

解：大坝在 x 方向上的投影面是 $50\text{ m} \times 24\text{ m}$ 的矩形，如图(a)所示。总压力的水平分力为

$$F_x = \rho g h_c A_x = \rho g \cdot \frac{z_0}{2} \cdot b \cdot z_0 = 9810 \times \frac{24}{2} \times 50 \times 24 = 1.41 \times 10^8 \text{ (N)}$$

总压力的垂直分力等于抛物面至自由表面所包围的压力体内的流体重，抛物面的面积 $A = 2x_0 z_0 / 3$ ，所以

$$F_z = \rho g \mathcal{V}_p = \rho g \left(\frac{2x_0 z_0}{3} b \right) = 9810 \times \left(\frac{2 \times 10 \times 24}{3} \times 50 \right) = 7.85 \times 10^7 \text{ (N)}$$

$$\text{总压力 } F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \sqrt{(1.41 \times 10^8)^2 + (7.85 \times 10^7)^2} = 1.61 \times 10^8 \text{ (N)}$$

$$\text{总压力与水平 } x \text{ 方向的夹角为 } \alpha = \arctan \frac{F_z}{F_x} = \arctan \frac{7.85 \times 10^7}{1.41 \times 10^8} = 29^\circ$$

三、静止液体作用在曲面上的总压力：例题

(2) 水平分力 F_x 作用线的淹深为

$$y_D = -\frac{\sin \theta J_{C_x}}{h_C \cdot A_x} = -\frac{\sin 90^\circ \cdot (50 \times 24^3) / 12}{12 \cdot (50 \times 24)} = -4 \text{ (m)}$$

即水平分力的作用线距离自由表面 $12 + 4 = 16 \text{ (m)}$, 或者说距离底面 8 m .

图(b): 垂直分力的作用线通过抛物体的重心 $C_G (3x_0/8, 3z_0/5)$, 即 F_z 作用线的横坐标为

$$\frac{3x_0}{8} = \frac{3 \times 10}{8} = 3.75 \text{ (m)}$$

图(c): 总压力的作用线通过垂直分力和水平分力作用线的交点, 所以一定通过点 $(3.75, 8)$, 且与水平方向的夹角为 29° .

该作用线与抛物面的交点即为总压力的作用点 C_P , 经过计算可以确定:

$$x_{C_P} = 5.43 \text{ m}, \quad z_{C_P} = 7.07 \text{ m}$$

四、静止液体作用在潜体和浮体上的浮力

物体沉没在静止液体中

x 方向:

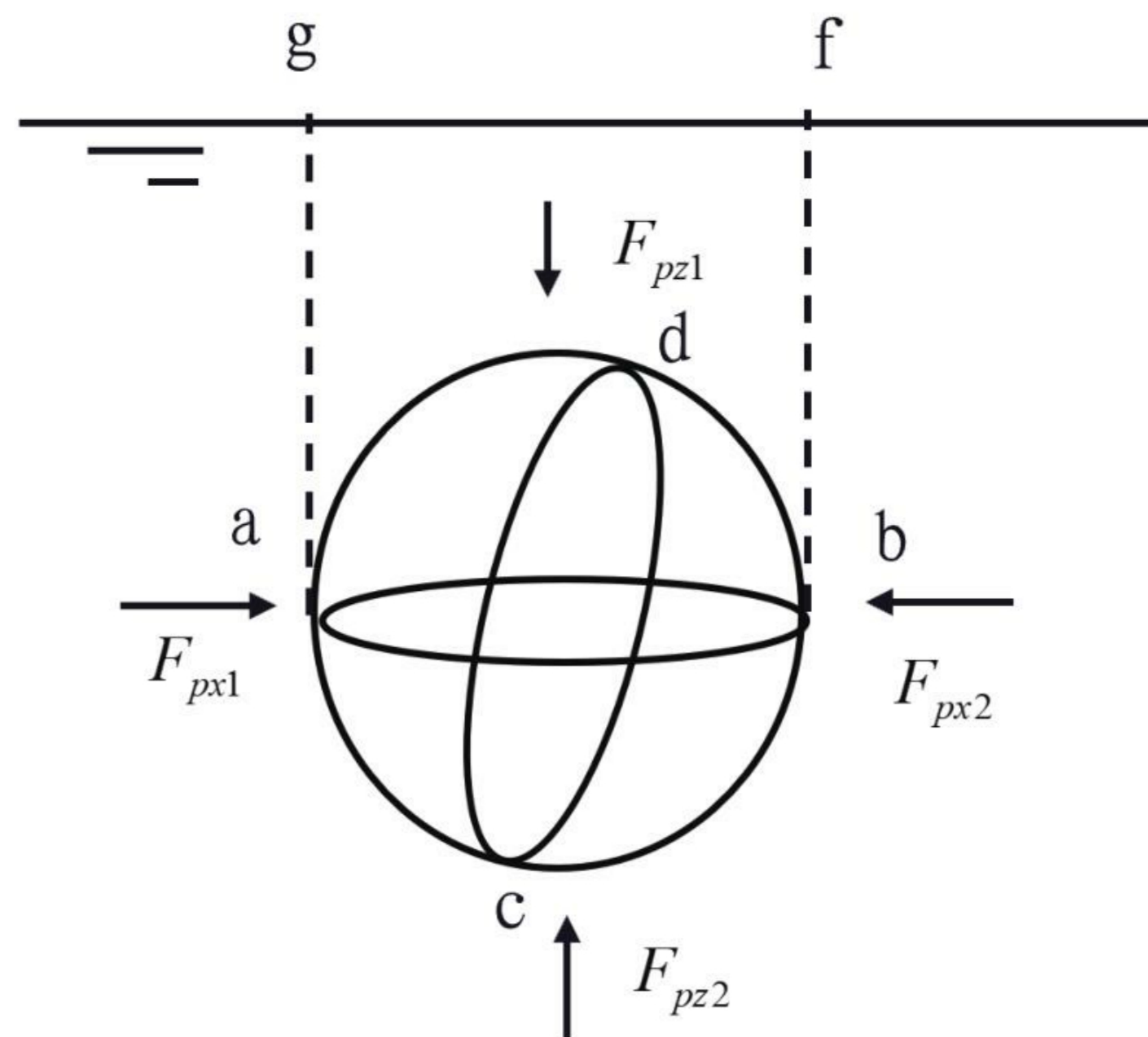
$$F_{px} = F_{px1} - F_{px2} = 0$$

y 方向:

$$F_{pz1} = \rho g V_{acbf g}$$

$$F_{pz2} = \rho g V_{adbfg}$$

$$F_{pz} = F_{pz2} - F_{pz1} = \rho g V_{adbc}$$

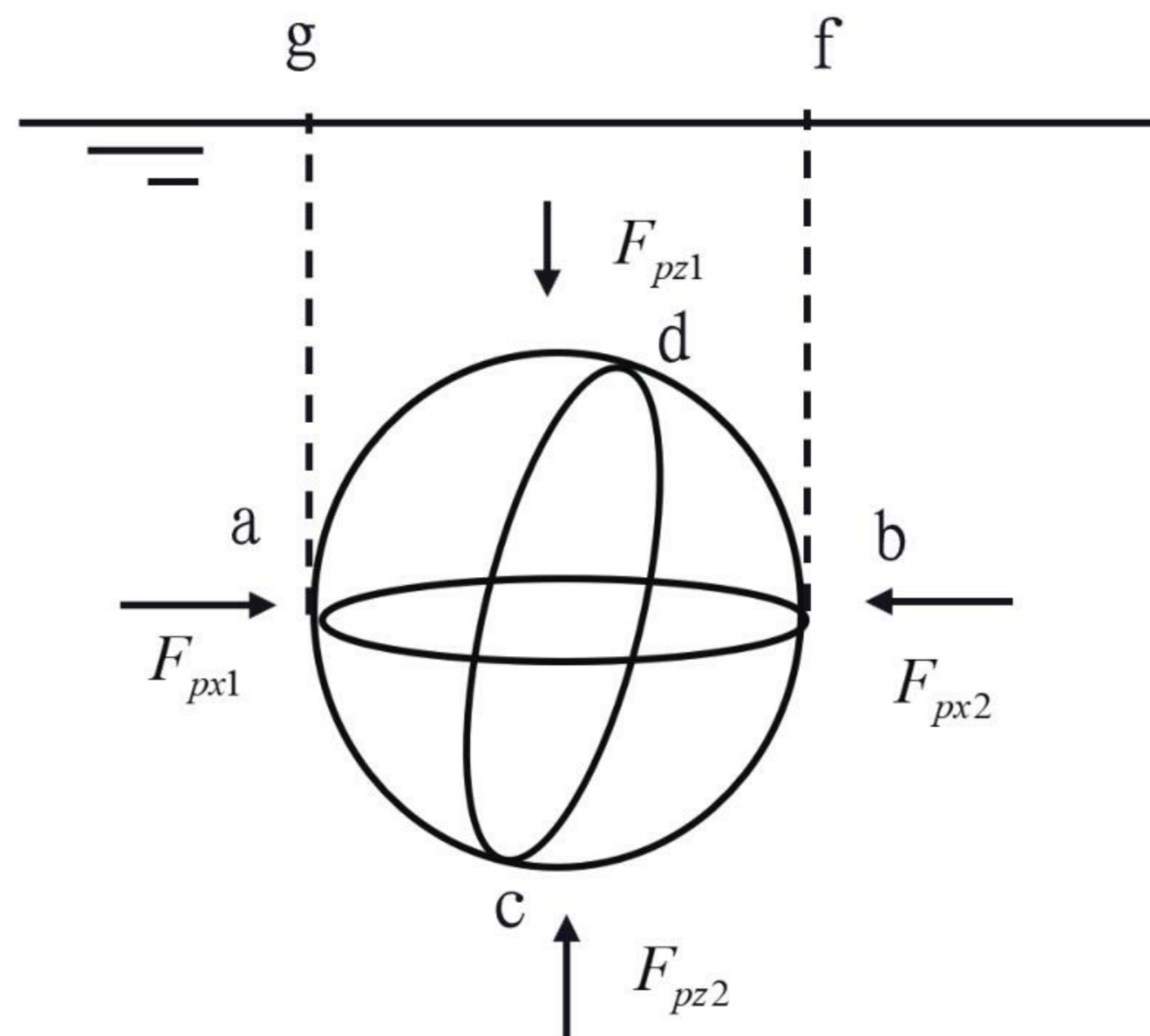


四、静止液体作用在潜体和浮体上的浮力

阿基米德原理:

液体作用在沉没物体上的总压力的方向垂直向上，大小等于沉没物体所排开液体的重力，该力又称为浮力。

- 浮体: $W < \rho g V$, 物体上升, 浮出液体表面。
- 潜体: $W = \rho g V$, 物体在液体中到处处于平衡状态。
- 沉体: $W > \rho g V$ 物体下沉, 直至液体底部。

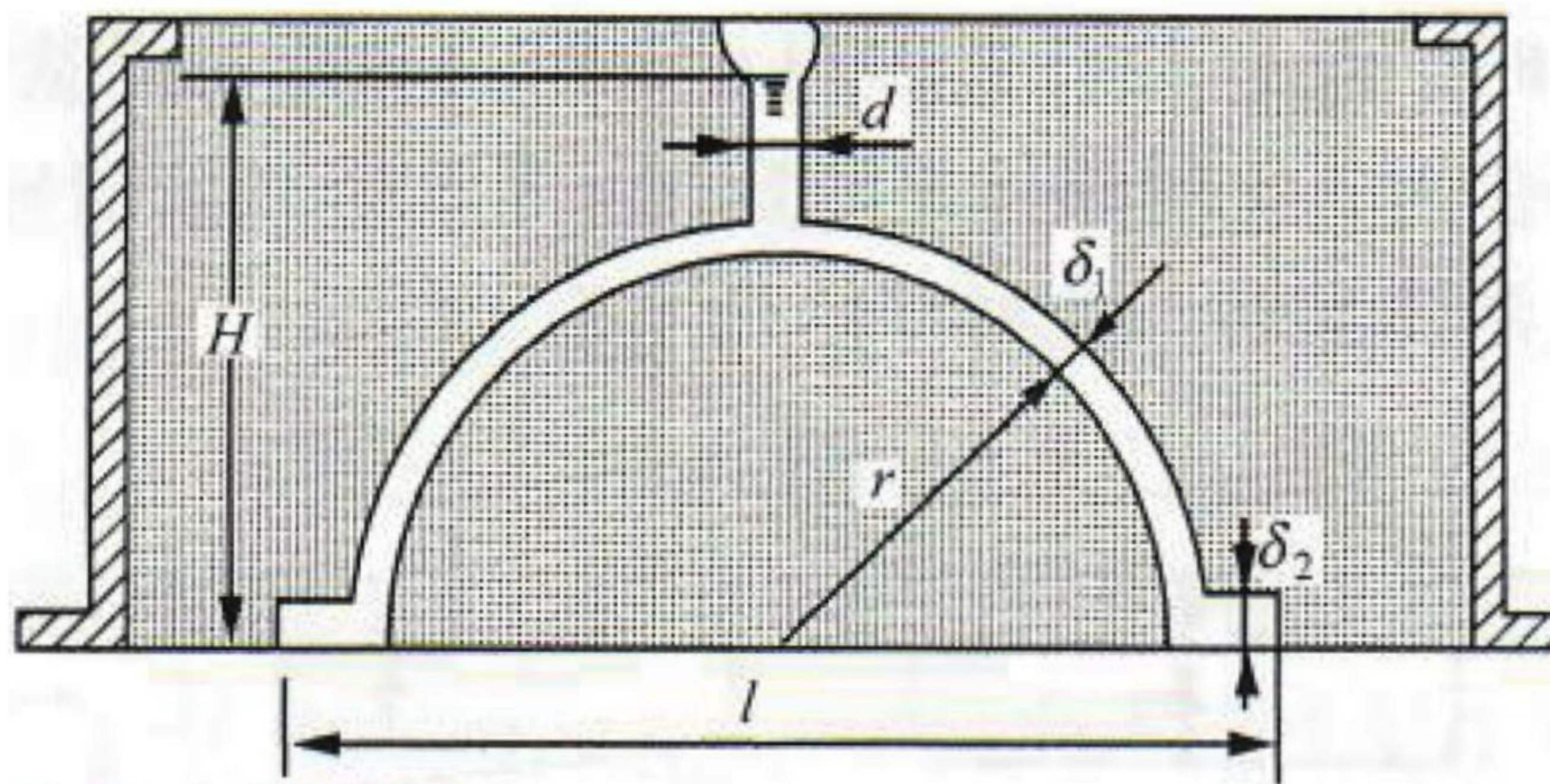


四、静止液体作用在潜体和浮体上的浮力：例题

例14: 用 $\rho = 7000 \text{ kg/m}^3$ 的熔化铁水, 浇注一半轴瓦的外衬, 如下图所示. 长度(垂直于纸面) $L = 300 \text{ mm}$, 内半径 $r = 200 \text{ mm}$, 宽度 $l = 500 \text{ mm}$, 到浇口的高度 $H = 300 \text{ mm}$, 直径 $d = 40 \text{ mm}$, 厚度 $\delta_1 = 30 \text{ mm}$, $\delta_2 = 40 \text{ mm}$. 试求熔化铁水对砂箱向上的抬箱力 F .

解: 金属溶液也是一种流体, 它同样会对接触的平面或曲面产生压力。
在这个问题金属溶液会对其上面的砂箱产生浮力而把它向上抬。
如果不把上箱压住, 则金属溶里有可能从上、下箱接缝处外溢造成废品。
因此, 有必要算出浮力, 用一块大于浮力的压箱压住。

熔化铁水对砂箱的抬箱力, 应等于**压力体铁水的重量**。



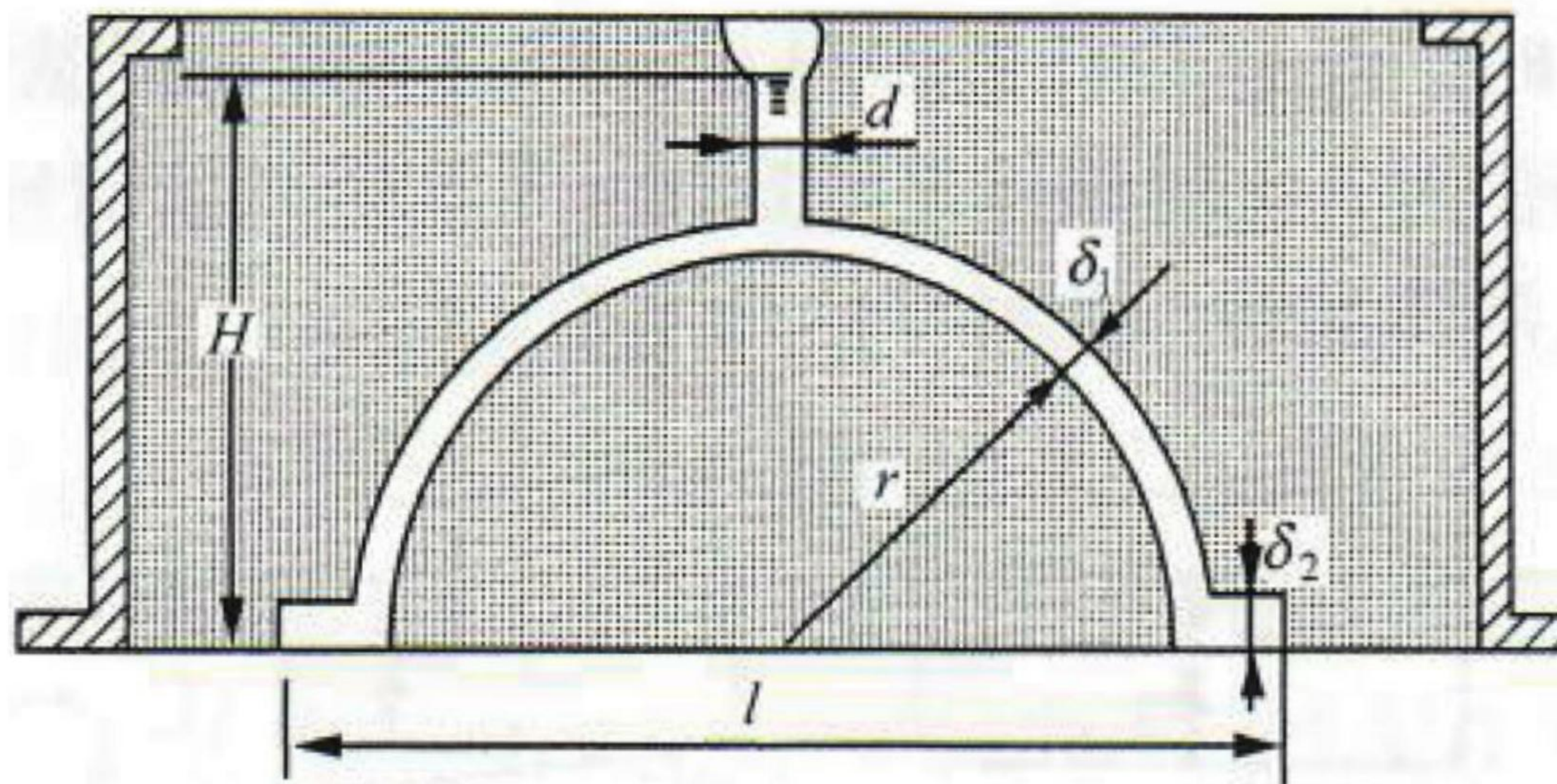
四、静止液体作用在潜体和浮体上的浮力：例题

压力体体积应为 LHl 长方形的去浇口的体积、半径为 $(r + \delta_1)$ 的圆柱体和厚度为 δ_2 的两条边缘体积, 即

$$\begin{aligned}
 V_p &= lHL - (H - r - \delta_1) \times \frac{\pi}{4}d^2 - \frac{1}{2}\pi (r + \delta_1)^2 L - (l - 2r - 2\delta_1) \delta_2 L \\
 &= 0.5 \times 0.3 \times 0.3 - (0.3 - 0.2 - 0.03) \frac{\pi}{4} (0.04)^2 - \frac{\pi}{2} (0.2 + 0.03)^2 \times 0.3 \\
 &\quad - (0.5 - 2 \times 0.2 - 2 \times 0.03)^2 \times 0.04 \times 0.3 \\
 &= 0.0195 \text{ (m}^3\text{)}
 \end{aligned}$$

抬箱力为

$$\begin{aligned}
 F &= \rho g_p \\
 &= 7000 \times 9.81 \times 0.0195 \\
 &= 1339.1 \text{ (N)}
 \end{aligned}$$



主要内容

- ① 作用在流体上的力
- ② 流体平衡微分方程
- ③ 流体静力学的基本方程式
- ④ 液柱式测压计
- ⑤ 液体在非惯性系中的相对平衡
- ⑥ 静止流体对壁面的压力
- ⑦ 总结与思考

习题作业

2-17、 2-19、 2-24、 2-29、 2-30

Thanks!
Welcome Questions