

工程流体力学 · 流体动力学分析基础

ENGINEERING FLUID MECHANICS · FUNDAMENTALS OF FLUID DYNAMICS

孙东科

dksun@seu.edu.cn

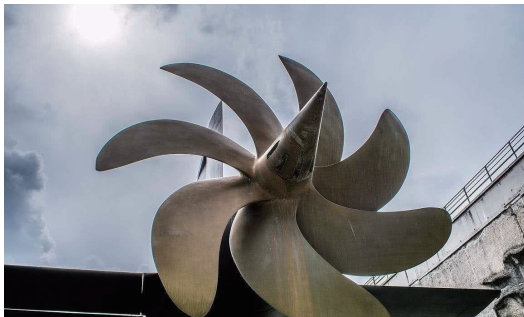
东南大学机械工程学院，江苏南京
School of Mechanical Engineering, Southeast University, China

Fundamentals of Fluid Dynamics

提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

BACKGROUND & MOTIVATION



提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

流体流动的连续性方程

质量守恒定律

Mass Conservation

若在某一定时间内，流出的流体质量和流入的流体质量不相等时，则这封闭曲面内一定会有流体密度的变化，以便使流体仍然充满整个封闭曲面内的空间。

- ① 如果流体是不可压缩的，则流出的流体质量必然等于流入的流体质量。
- ② 在管路和明渠等流体力学计算中，**质量守恒定律**得到极为广泛的应用。

流体流动的连续性方程

流体运动的连续性条件

流体连续地充满所占据的空间，当流体流动时在其内部不形成空隙，这就是流体运动的连续性条件。

本质：质量守恒定律

由雷诺输运定理
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \beta \rho dV + \int_{CS} \beta \rho v_n dA$$

及单位质量 (“密度”) $\beta = 1$

系统的质量 (“质量”) $B = \int_V \rho dV = m \xrightarrow{\frac{dm}{dt}=0} \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho v_n dA = 0$

这就是连续性方程

连续性方程的物理意义

单位时间内控制体内流体质量的增量，等于通过控制体表面的质量的净通量。

流体流动的连续性方程

连续方程的其它形式
$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho dV + \int_{CS} \rho v_n dA = 0$$

▶ 定常流动

$$\Rightarrow \int_{CS} \rho v_n dA = 0$$

在定常流动条件下，通过控制面的流体质量等于零

▶ 一维定常流

$$\Rightarrow \int_{A_1} \rho v_{n1} dA = \int_{A_2} \rho v_{n2} dA$$

$$\rho v_{1a} A_1 = \rho v_{2a} A_2 = \text{常数}$$

在定常流动条件下，通过流管的任意有效截面的质量流量是常量

▶ 不可压缩一维定常流 $\Rightarrow$

$$v_a A = \text{常数}$$

在定常流动条件下，通过流管的任意有效截面的体积流量是常量

提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

理想流体的能量方程

能量守恒定律

Energy Conservation

流体系统中能量随时间的变化率等于作用于控制体上的表面力、系统内流体受到的质量力对系统内流体所作的功和外界与系统交换的热量之和。

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{system}} = \dot{Q} + \dot{W}$$

能量 E 与系统的热力学状态相关，是空间和时间的函数。

理想流体的能量方程

根据雷诺输运定理

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \beta \rho dV + \int_{CS} \beta \rho v_n dA$$

将

单位质量流体能量（内能+动能） $\beta = e + \frac{v^2}{2}$ 与流体能量 $B = \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV$

代入雷诺输运定理，可得

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dA$$

这里，系统的总能 E 即为上式中的 B 。接下来，我们应用能量守恒定律

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{system}} = \dot{Q} + \dot{W}$$

理想流体的能量方程

对于流体系统，单位时间**质量力** $\vec{f}$ 和**表面力** $\vec{\sigma}_s$ **做功**之和为

$$\int_V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_A \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA$$

单位时间外界与系统**交换的热量**记为 $\dot{Q}$ ，那么（根据能量守恒定理）

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dA \\ &= \int_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{CS} \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA + \dot{Q} \end{aligned}$$

定常流动

$$\int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dA = \int_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{CS} \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA + \dot{Q}$$

能量方程的物理本质： 能量守恒定理。

理想流体的能量方程——一维流动的能量方程

当不考虑系统与外界的热量交换，即

$$\dot{Q} = 0$$

而且系统的质量力仅有重力，即

$$\vec{f} = \vec{g}$$

那么，流体的能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dA = \int_{CV} \rho \vec{f} \cdot \vec{v} dV + \int_{CS} \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA + \dot{Q}$$

可化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dA = \int_{CV} \rho \vec{g} \cdot \vec{v} dV + \int_{CS} \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA$$

理想流体的能量方程——一维流动的能量方程

由"重力做功 = 位势能", 即将单位质量流体能量 $\beta = e + \frac{v^2}{2} + gz$ (内能+动能+势能) 代入雷诺输运定理, 可得重力场中无热交换条件下能量方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dA = \int_{CS} \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA$$

将 $\vec{\sigma}_s = p\vec{n} + \vec{\tau} = -p\vec{n} + \vec{\tau}$ 代入, 可得

$$\int_{CS} \vec{\sigma}_s \cdot \vec{v} dA = - \int_{CS} p\vec{n} \cdot \vec{v} dA + \int_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA = - \int_{CS} p v_n dA + \int_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA$$

于是, 能量方程可化为

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = \int_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA$$

理想流体的能量方程——一维流动的能量方程

理想流体:

$$\vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$$

黏性流体: 近管壁处

$$\vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0$$

进、出截面: $\vec{\tau}$ 垂直于 $\vec{v}$ $\Rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow \int_{CS} \vec{\tau} \cdot \vec{v} dA = 0$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{CV} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} + gz \right) dV + \int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0$$

在定常流动条件下:

$$\int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0$$

这就是重力场中理想流体作绝热定常流动的能量方程。

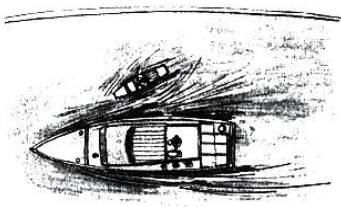
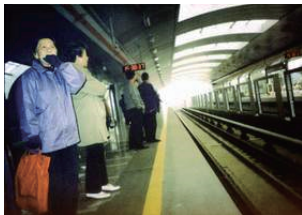
提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

伯努利方程及其应用

20世纪初的两个惨案

- 1905年初冬，莫斯科至西伯利亚的小火车站站长率领一批随从迎接俄国沙皇派往西伯利亚的一位钦差大臣，造成极其严重的人身伤亡事故。火车站站台警戒线的由来。



- 1912年秋天，世界上最大远洋轮“奥林匹克”号正在大海上航行，与一艘比它小得多的铁甲巡洋舰“豪克”号相撞，酿成一件重大海难事故。

长江的水流量/流速为多少？

伯努利方程及其应用

重力场中理想流体在作绝热定常流动的能量方程

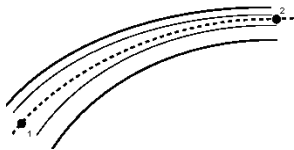
$$\int_{CS} \rho v_n \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0 \xrightarrow{\text{取微流管为控制体, 管壁 } v_n=0}$$

$$\int_{A_2} \rho v \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA - \int_{A_1} \rho v \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) dA = 0 \Rightarrow$$

$$\left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \int_{A_1} \rho v dA - \left(e + \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) \int_{A_1} \rho v dA = 0$$

$$\xrightarrow{\text{质量守恒}} e_2 + \frac{v_2^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho_2} = e_1 + \frac{v_1^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho_1}$$

$$\xrightarrow{\text{不可压缩、与外界无热交换}} \frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$



微元流管

理想流体在重力场中的一维绝热定常流动的能量方程

伯努利方程及其应用

伯努利方程: Bernoulli, 1738

$$\frac{v^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{常数}$$

应用范围:

- ① 不可压缩理想流体在重力场中的定常流动。
- ② 同一条流线上的不同的点; 沿不同的流线时, 积分常数的值一般不相同。

物理意义:

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时, 沿流线单位质量流体的动能、位势能和压强势能之和是常数。

伯努利方程及其应用

- 速度水头

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{常数} = H$$

- 压强水头

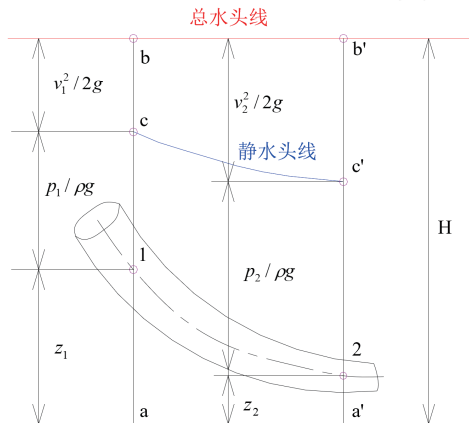
- 位置水头

- 总水头

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线。



伯努利方程及其应用

- 速度水头

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{常数} = H$$

- 位置水头

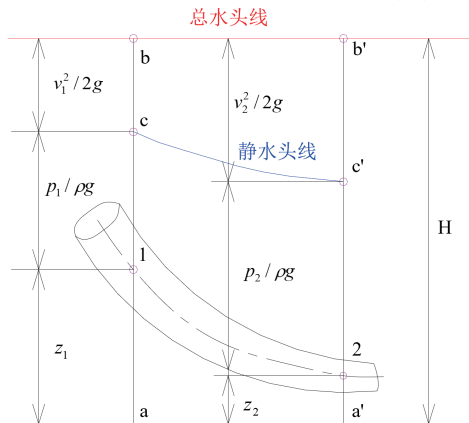
- 压强水头

- 总水头

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线。



伯努利方程及其应用

- 速度水头

$$\frac{v^2}{2g}$$

- 位置水头

$$+ z$$

$$+ \frac{p}{\rho g}$$

= 常数

= H

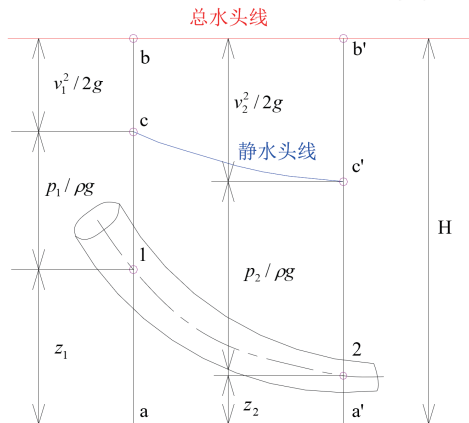
- 压强水头

- 总水头

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线。



伯努利方程及其应用

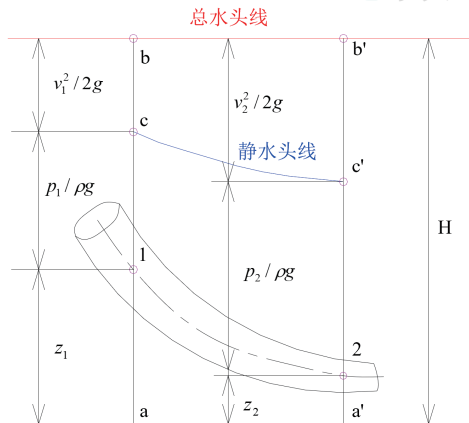
- 速度水头 $\frac{v^2}{2g}$
- 位置水头 z
- 压强水头 $\frac{p}{\rho g}$
- 总水头 H

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{常数} = H$$

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线。



伯努利方程及其应用

- 速度水头 $\frac{v^2}{2g}$
- 位置水头 z
- 压强水头 $\frac{p}{\rho g}$

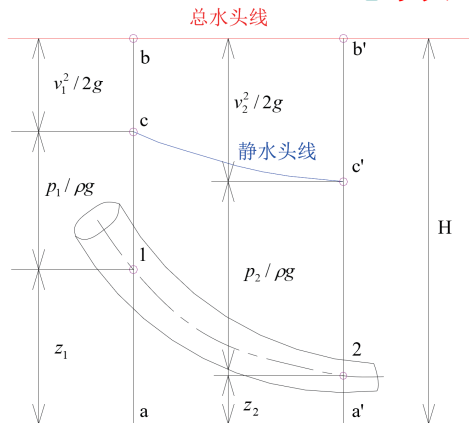
$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = \text{常数} = H$$

总水头

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线。



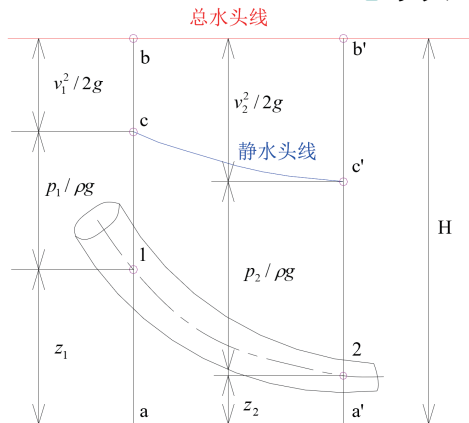
伯努利方程及其应用

• 速度水头 $\frac{v^2}{2g}$ + 位置水头 z + 压强水头 $\frac{p}{\rho g}$ = 常数 = 总水头 H

若1、2为同一条流线（或微元流束）上的任意两点

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

不可压缩理想流体在重力场中作定常流动时，沿流线单位重力流体的总水头线为一平行于基准线的水平线。



伯努利方程及其应用：小孔出流 (TORRICELLI, 1644)

伯努利方程

一装有液体的容器，壁面开一小孔，如图。求小孔出口流速。

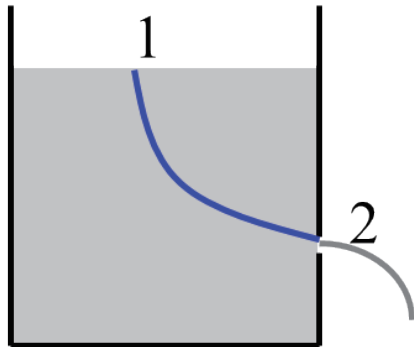
选取1到2之间的一条流线，应用伯努利方程，有

$$gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} = gz_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho}$$

根据“小孔”条件，可知

$$V_1 \rightarrow 0 \quad p_1 = p_a \quad p_2 = p_a$$

$$V_2^2 = 2g(z_1 - z_2) = 2gh \quad \Rightarrow \quad V_2 = \sqrt{2gh}$$



伯努利方程及其应用：皮托管（PITOT, 1733），测流速

皮托管测流速原理

弯成直角的玻璃管两端开口，一端的开口面向来流，另一端的开口向上，管内液面高出水面 h ，水中的 A 端距离水面 H_0 。

由 B 至 A 建立伯努利方程

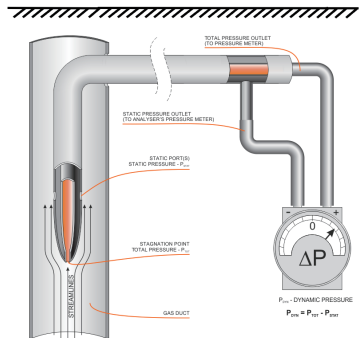
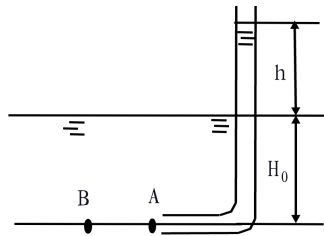
$$\frac{v_B^2}{2} + \frac{p_B}{\rho} = \frac{p_A}{\rho}$$

由 $p_B = \rho g H_0$ 和 $p_A = \rho g (H_0 + h)$ 得

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_A - p_B)} = \sqrt{2gh}$$

工程应用

$$v_B = \varphi \sqrt{2gh}$$



伯努利方程及其应用：动压管，测流速

静压管与皮托管组合成一体，由差压计给出总压和静压的差值，从而测出目标位置点的流速

$$v_B = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_A - p_B)}$$

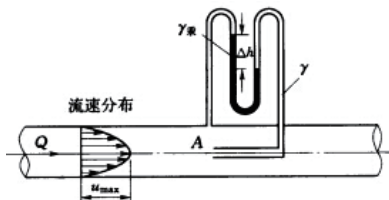
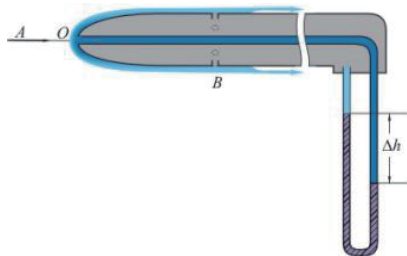
设管道流体密度为 ρ 、差压计所用液体密度为 ρ'

$$v_B = \sqrt{2g\Delta h \frac{\rho' - \rho}{\rho}}$$

工程应用

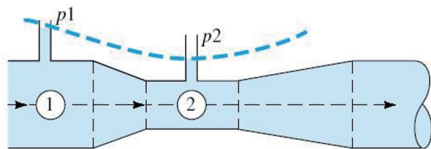
$$v_B = \varphi \sqrt{2g\Delta h \frac{\rho' - \rho}{\rho}}$$

其中， φ 为校正系数 (< 1)，一般由皮托管制造商给出。



伯努利方程及其应用：文丘里管（VENTURI TUBE）流量

文丘里管由收缩段和扩张段组成，在入口前直管段上的截面1和喉部截面2两处测量静压差，根据此静压差和两截面的截面积可计算管道流量。



选取 1 到 2 之间的一条流线， $z_1 = z_2$ 。应用伯努利方程，有

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

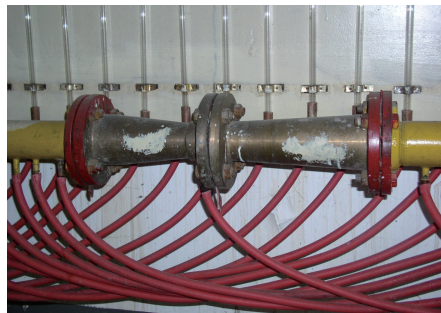
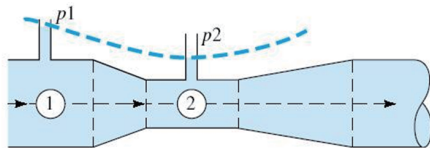
根据不可压缩流体的连续性方程，有 $V_1 A_1 = V_2 A_2$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - (A_2/A_1)^2}}, \quad Q = V_2 A_2 = A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - (A_2/A_1)^2}}$$

伯努利方程及其应用：文丘里管（VENTURI TUBE）流量

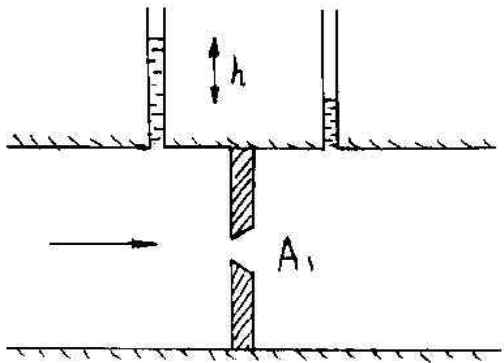
在实际应用中，考虑到粘性引起的截面上速度分布的不均匀以及流动中的能量损失，还应乘上一流量系数进行修正，即

$$Q = \varphi A_2 \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{1 - (A_2/A_1)^2}}$$



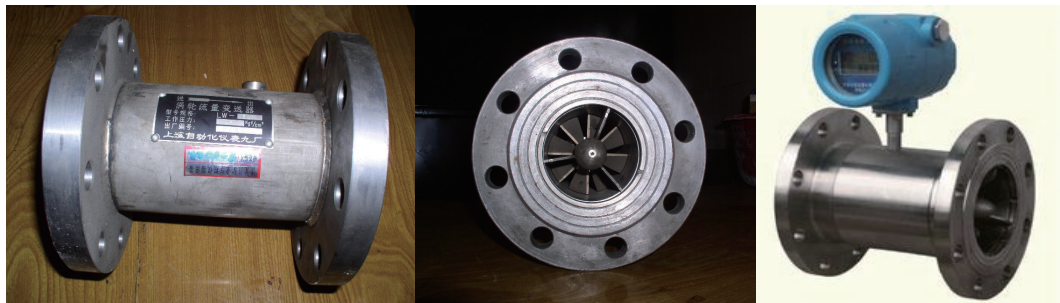
伯努利方程及其应用：文丘里管（VENTURI TUBE）流量

除文丘里流量计外，工程上常用的还有孔板流量计和喷嘴流量计，它们都属于节流式流量计。



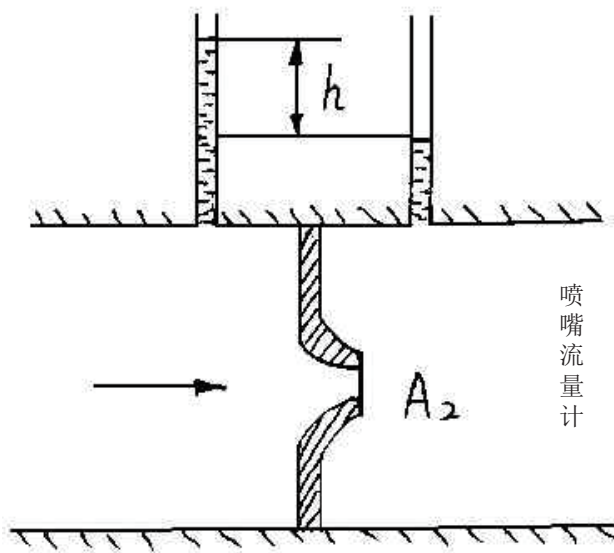
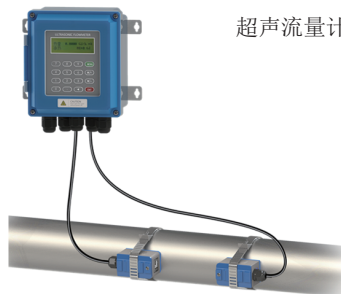
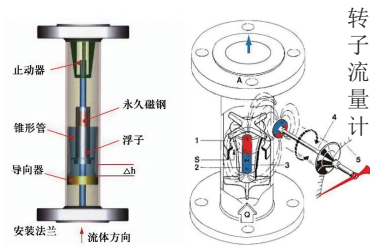
伯努利方程及其应用：涡轮流量计

采用涡轮进行测量的流量计。它先将流速转换为涡轮的转速，再将转速转换成与流量成正比的电信号。



这种流量计用于检测瞬时流量和总的积算流量，其输出信号为频率，易于数字化体上。感应线圈和永久磁铁一起固定在壳体上。当铁磁性涡轮叶片经过磁铁时，磁路的磁阻发生变化，从而产生感应信号。

伯努利方程及其应用：工程上常用的流量计



新型流速测量技术

现代流体力学、空气动力学、热力学、水力学、生态学、以及环境工程、化工工程、航空航天工程、水利水电工程、热能工程、燃烧工程、石油工程等都提出了一系列复杂的流动问题。

复杂的流动问题包括高速流、低速流、旋转流、涡流、管道流、燃烧流、振荡流、反向流、两相流等。

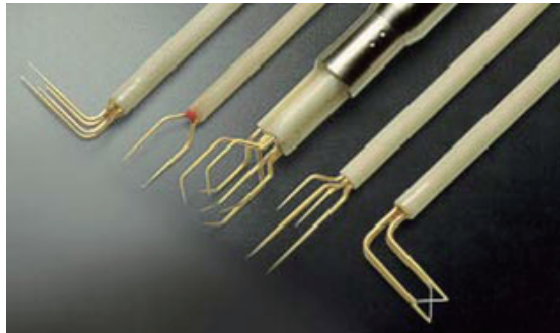
这些都需要新的测量方法和测量工具，要求新的测量技术和仪器能够适应由单点向多点、平面向空间、稳态向瞬态、单相向多相发展。

20世纪90年代以后出现的新流动测量技术：

- ① 热线热膜风速仪
- ② 激光测速仪
- ③ 粒子成像速度场仪 (Particle Image Velocimetry, PIV)——流场显示技术

新型流速测量技术：热线热膜风速仪

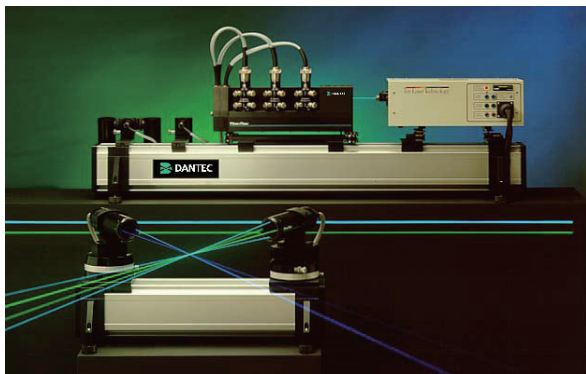
热线热膜风速仪是利用放置在流场中通过加热电流的细金属丝（直径0.5-10微米）来测量速度的仪器。金属丝中通过加热电流，金属丝的温度保持的恒定，因而当风速变化时，金属丝的换热量就随之而改变，从而产生了电信号的变化。通过校准过程，测量电信号的变化量就可以得到实际流场的速度大小。



由于热线热膜风速仪的高频响应，它是湍流以及流动研究中使用最早、最广泛的单点测量仪器。

新型流速测量技术：激光测速仪

激光测速仪是通过激光发射测量一定时间间隔内被测物体的移动距离，计算得出物体移动速度的装置。



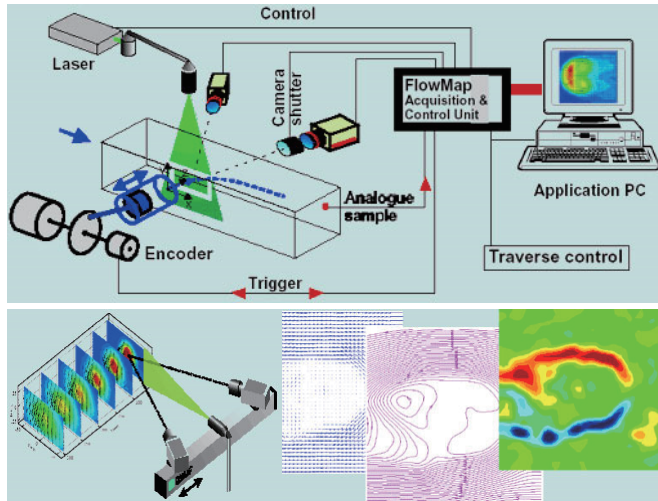
激光测距（即电磁波，速度为30万千米/秒），是通过对被测物体发射激光光束，并接收该激光光束的反射波、记录该时间差，来确定被测物体与测试点的距离。

新型流速测量技术：粒子成像速度场仪

粒子成像速度场仪是指在流体中投放示踪粒子，并利用粒子在水流中的运动图像来测量流速场的仪器（简称PIV）。

一个典型的粒子成像速度场仪包括

- ① 光源系统、
 - ② 示踪粒子投放系统、
 - ③ 接收和记录粒子散光的光学系统、
 - ④ 信息处理系统
- 等若干部分。



伯努利方程及其应用：例题

例：有一贮水装置，贮水池足够大，当阀门关闭时，压强计读数为2.8个大气压强（相对压强，非绝对压强）。而当将阀门全开，水从管中流出时，压强计读数是0.6个大气压强，试求当水管直径 $d = 12\text{cm}$ 时，通过出口的体积流量（不计流动损失）。

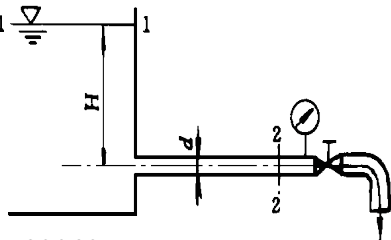
解：当阀门全开时，列1-1、2-2截面的伯努利方程

$$H + \frac{p_a}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_a + 0.6p_a}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

当阀门关闭时，根据压强计的读数并应用流体静力学基本方程求出 H 值

$$p_a + \rho g H = p_a + 2.8p_a \Rightarrow H = \frac{2.8p_a}{\rho g} = \frac{2.8 \times 98060}{9806} = 28 \text{ (mH}_2\text{O)}$$

$$V_2 = \sqrt{2g \left(H - \frac{0.6p_a}{\rho g} \right)} = \sqrt{2 \times 9.806 \times \left(2.8 - \frac{0.6 \times 98060}{9806} \right)} = 20.78 \text{ (m/s)}$$



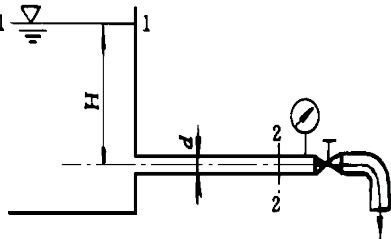
伯努利方程及其应用：例题

例：有一贮水装置，贮水池足够大，当阀门关闭时，压强计读数为2.8个大气压强（相对压强，非绝对压强）。而当将阀门全开，水从管中流出时，压强计读数是0.6个大气压强，试求当水管直径 $d = 12\text{cm}$ 时，通过出口的体积流量（不计流动损失）。

解：当阀门全开时，列1-1、2-2截面的伯努利方程

$$H + \frac{p_a}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{p_a + 0.6p_a}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

当阀门关闭时，根据压强计的读数并应用流体静力学基本方程求出 H 值



$$q_V = \frac{\pi}{4} d^2 V_2 = 0.785 \times 0.12^2 \times 20.78 = 0.235 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

伯努利方程及其应用：例题

例：水流通过如图所示管路流入大气，已知：U形测压管中水银柱高差 $\Delta h = 0.2\text{m}$ ， $h_1 = 0.72\text{m}$ (为 H_2O)，管径 $d_1 = 0.1\text{m}$ ，管嘴出口直径 $d_2 = 0.05\text{m}$ ，不计管中水头损失，试求管中流量 q_v 。

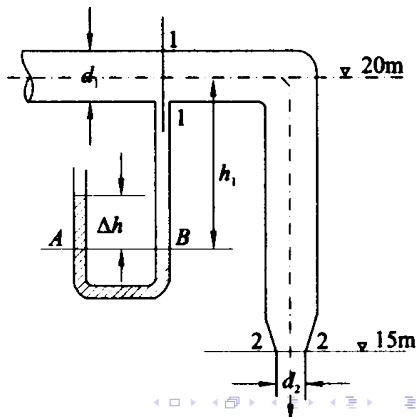
解：首先计算1-1断面管路中心的压强。因为A-B为等压面，列等压面方程得：

$$\rho_{\text{Hg}} g \Delta h = p_1 + \rho g h_1$$

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho g} &= \frac{\rho_{\text{Hg}}}{\rho} \Delta h - h_1 \\ &= 13.6 \times 0.2 - 0.72 = 2 \end{aligned}$$

列1-1和2-2断面的伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$



伯努利方程及其应用：例题

例：水流通过如图所示管路流入大气，已知：U形测压管中水银柱高差 $\Delta h = 0.2\text{m}$ ， $h_1 = 0.72\text{m}$ (为 H_2O)，管径 $d_1 = 0.1\text{m}$ ，管嘴出口直径 $d_2 = 0.05\text{m}$ ，不计管中水头损失，试求管中流量 q_v 。

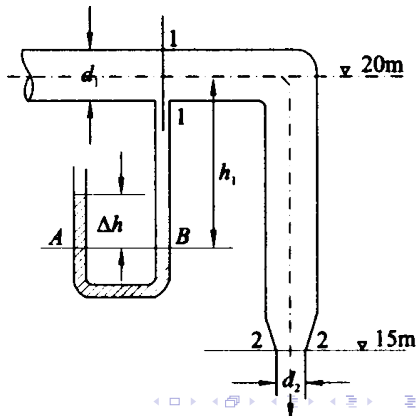
解：断面1-1和2-2的伯努利方程

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g}$$

由连续性方程，得 $V_1 = V_2 \left(\frac{d_2}{d_1} \right)^2$ ，进而

$$V_2 = \sqrt{\frac{19.6 \times 7 \times 16}{15}} = 12.1 \text{ (m/s)}$$

$$q_v = \frac{\pi}{4} d_2^2 V_2 = \frac{\pi}{4} \times 0.05^2 \times 12.1 = 0.024 \text{ (m}^3/\text{s)}$$



提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程**
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

请思考

如何求解流体与固体之间的相互作用力？

动量方程

由动量定理: 系统内流体动量对时间的变化率等于作用在系统上外力的矢量和, 即

$$\sum \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})_s$$

应用雷诺输运方程 $\left(\frac{dB}{dt}\right)_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \beta \rho dV + \int_{cs} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$

令 $\vec{B} = m\vec{V}$, $\beta = \frac{d\vec{B}}{dm} = \vec{V}$, 可得

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V})_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V} dV + \int_{cs} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

定常流动 $\frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \rho \vec{V} dV = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(m\vec{V})_s = \int_{cs} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$

动量方程

定常流动时的动量方程

$$\sum \vec{F} = \int_{cs} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sum \vec{F}_x = \int_{cs} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \\ \sum \vec{F}_y = \int_{cs} \rho v (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \\ \sum \vec{F}_z = \int_{cs} \rho w (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \end{cases}$$

关于合力项的说明

- 合力项包含作用于控制体、控制面上的所有的力。
- 在初始时刻，系统与控制体重合，因此作用于系统的力就相当于作用于控制体的力。
- 如果控制面上流体的流速、密度均匀，则有

$$\int_{cs} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum (\rho Q \vec{V})_{\text{out}} - \sum (\rho Q \vec{V})_{\text{in}}$$

动量方程：关于动量净流出率项的说明

上述流速均匀、密度均匀的动量方程

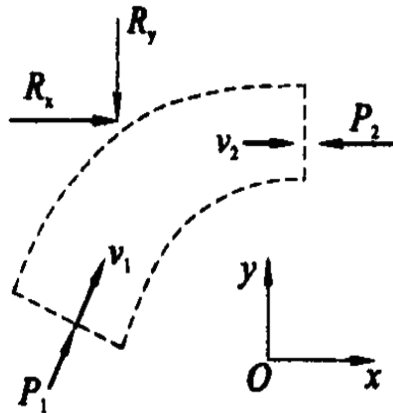
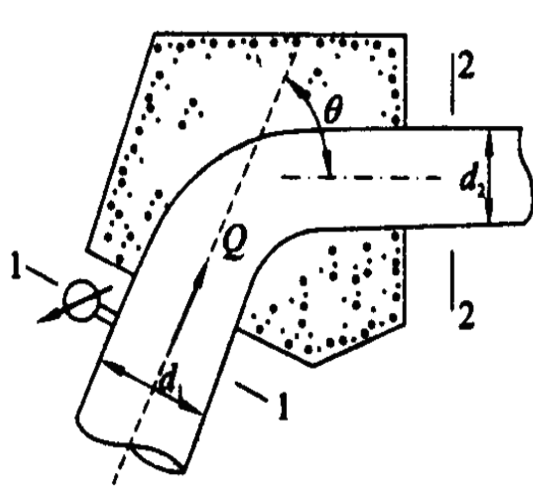
$$\int_{cs} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum (\rho Q \vec{V})_{\text{out}} - \sum (\rho Q \vec{V})_{\text{in}}$$

可写成三个分量方程

流速均匀、密度均匀的动量方程：分量形式

$$\begin{cases} \int_{cs} \rho u (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum (\rho Q u)_{\text{out}} - \sum (\rho Q u)_{\text{in}} \\ \int_{cs} \rho v (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum (\rho Q v)_{\text{out}} - \sum (\rho Q v)_{\text{in}} \\ \int_{cs} \rho w (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = \sum (\rho Q w)_{\text{out}} - \sum (\rho Q w)_{\text{in}} \end{cases}$$

动量方程：应用举例，流体作用于弯管上的力



动量方程：应用举例

例：水平放置在混凝土支座上的变直径弯管，弯管两端与等直径管相连接处的断面1-1上压力表读数 $p_1 = 17.6\text{kPa}$ ，管中流量 $q_V = 0.1\text{m}^3/\text{s}$ ，若直径 $d_1 = 300\text{mm}$ ， $d_2 = 200\text{mm}$ ，转角 $\theta = 60^\circ$ 。求水对弯管作用力 F 的大小。

解：取管道进、出两个截面和管内壁为控制面，如图所示，坐标按图示方向设置。

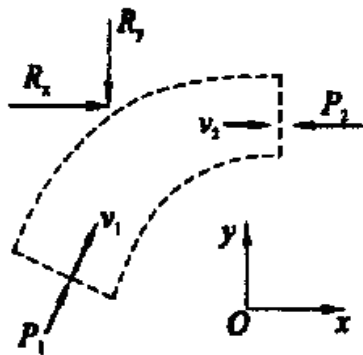
1. 根据连续性方程可求得

$$v_1 = \frac{q_V}{\frac{\pi}{4}d_1^2} = \frac{0.1 \times 4}{\pi \times 0.3^2} = 1.42$$

$$v_2 = \frac{q_V}{\frac{\pi}{4}d_2^2} = \frac{0.1 \times 4}{\pi \times 0.2^2} = 3.18$$

2. 列管道进、出口的伯努利方程

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$



动量方程：应用举例

例：水平放置在混凝土支座上的变直径弯管，弯管两端与等直径管相连接处的断面1-1上压力表读数 $p_1 = 17.6\text{kPa}$ ，管中流量 $q_V = 0.1\text{m}^3/\text{s}$ ，若直径 $d_1 = 300\text{mm}$ ， $d_2 = 200\text{mm}$ ，转角 $\theta = 60^\circ$ 。求水对弯管作用力 F 的大小。

解：取管道进、出两个截面和管内壁为控制面，如图所示，坐标按图示方向设置。

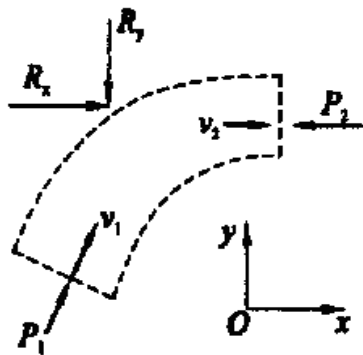
由伯努利方程可解出

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \rho (v_1^2 - v_2^2) / 2 \\ &= 17.6 \times 10^3 + 1000 (1.42^2 - 3.18^2) / 2 \\ &= 17.2 \times 10^3 \end{aligned}$$

3. 所取控制体受力分析

$$P_1 = p_1 A_1 = 17.6 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 0.3^2 = 12.43$$

$$P_2 = p_2 A_2 = 17.2 \times 10^3 \times \frac{\pi}{4} \times 0.2^2 = 5.40$$



动量方程：应用举例

4. 写出动量方程

- 沿 x 轴方向

$$\begin{aligned} R_x &= \rho q_V (v_2 - v_1 \cos \theta) + P_2 - P_1 \cos \theta \\ &= 0.1 \times (3.18 - 1.42 \cos 60^\circ) + 5.40 - 12.43 \cos 60^\circ = -0.568 \end{aligned}$$

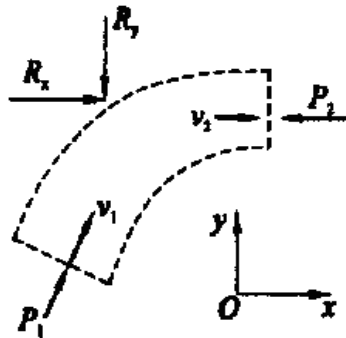
- 沿 y 轴方向

$$\begin{aligned} R_y &= P_1 \sin \theta + \rho q_V v_1 \sin \theta \\ &= 12.43 \sin 60^\circ + 0.1 \times 1.42 \sin 60^\circ = 10.88 \end{aligned}$$

- 管壁对水的反作用力

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-0.568)^2 + 10.88^2} = 10.89$$

水流对弯管的作用力 F 与 R 大小相等, 方向相反。



动量方程：用动量方程求解作用力步骤

用**动量方程**求解**流体对固体边界的作用力**时，以下步骤可供参考：

用动量方程求解作用力步骤

- ① 取控制体，建立坐标系；
- ② 运动、受力分析；
- ③ 建立动量方程；
- ④ 确定流体对固体边界的作用力。

动量方程：射流作用在平面壁上的冲击力

射流：流体从管嘴喷射出而形成射流

如射流在同一大气压强下，并忽略自身重力，则作用在流体上的力，只有固定平面对射流的阻力，它与射流对固定平面的冲击力构成一对作用力和反作用力。



射流作用的工程应用

水射流清洗船体、铸造清砂、矿车清扫、水力采煤、采掘设备的截齿喷雾冷却、航空航天器的喷射推进等等。

动量方程：射流作用在平面壁上的冲击力

流体从喷嘴射而出，喷射到固定光滑平板上，平板与水平面成 θ 角，如图所示。

x 轴方向的动量方程为

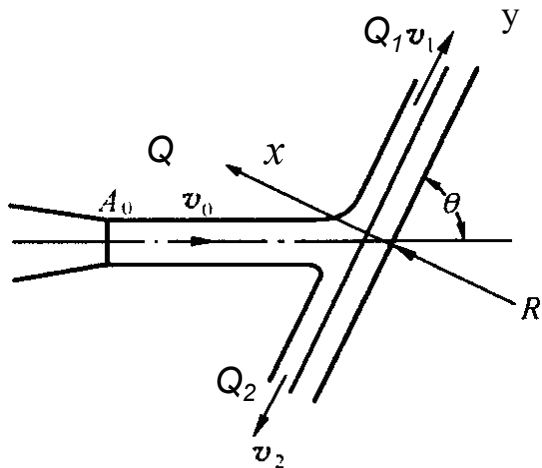
$$\begin{aligned} R_x &= \rho q_1 v_1 \cos 90^\circ + \rho q_2 v_2 \cos 90^\circ \\ &\quad - (-\rho q_0 v_0 \sin \theta) \\ &= \rho Q v_0 \sin \theta = \rho A_0 v_0^2 \sin \theta \end{aligned}$$

y 轴方向的动量方程为

$$\begin{aligned} R_y &= \rho q_1 v_1 - \rho q_2 v_2 - \rho q v_0 \cos \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

射流对平板的冲击力

$$R' = -R$$



动量方程：射流作用在平面壁上的冲击力

流体从喷嘴射而出，喷射到固定光滑平板上，平板与水平面成 θ 角，如图所示。

由伯努利方程，

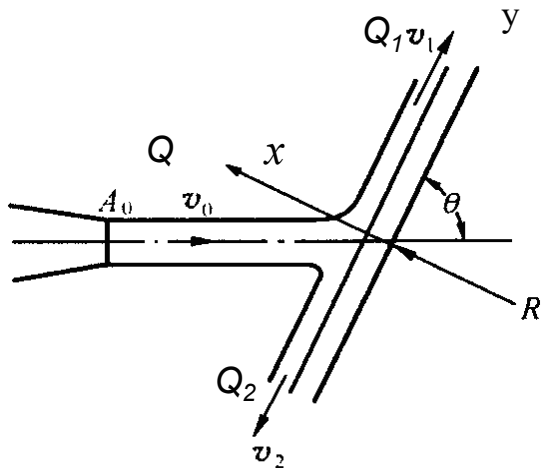
$$v_0 = v_1 = v_2$$

由流体连续性方程

$$q_1 + q_2 = q$$

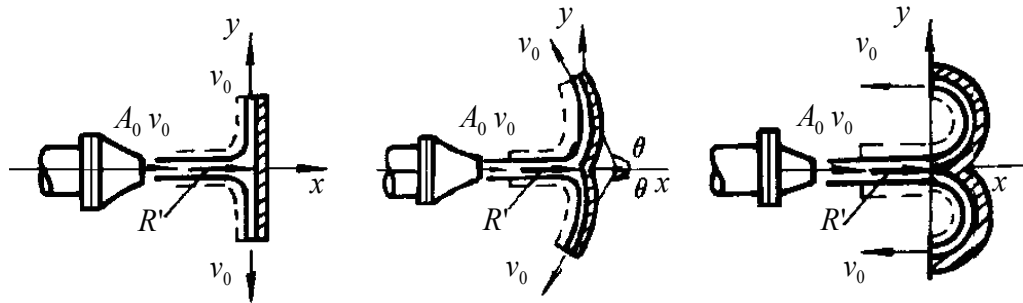
$$q_1 - q_2 = q \cos \theta$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = \frac{1}{2}q(1 + \cos \theta) \\ q_2 = \frac{1}{2}q(1 - \cos \theta) \end{cases}$$



动量方程：射流作用在曲面壁上的冲击力

- 当平板 $\theta = 90^\circ$ 时, $R' = \rho A_0 v_0^2$
- 如果平板沿射流方向以速度 v 运动, 则射流的冲出力为 $R' = \rho A_0 (v_0 \pm v')^2$



- 射流对曲板的冲击力 $R' = \rho A_0 v_0^2 (1 - \cos \theta)$
- 当曲板 $\theta = 180^\circ$ 时 $R' = 2\rho A_0 v_0^2$

动量方程：射流的反推力

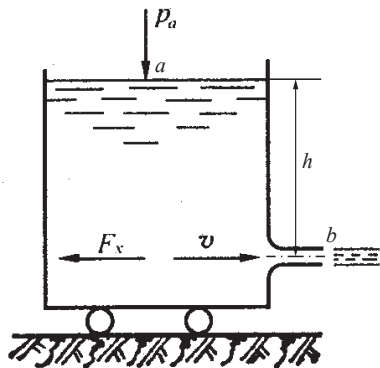
火箭飞行的根本动力是火箭内部的燃料发生爆炸性燃烧，产生大量高温高压的气体，从尾部喷出形成射流，射流对火箭有一反推力，使火箭向前运动。



烟花、火箭、喷气式飞机、喷水船等都是借助这种反推力而工作的。



动量方程的应用：例题



射流反推力在 x 轴方向上

装有液体的容器侧壁开一小孔，液体从小孔流出形成射流，如图所示。

由伯努利方程

$$\frac{v_b^2}{2} + \frac{p_b}{\rho} = \frac{p_a}{\rho}$$

其中， a 为容器顶部液面， b 为小孔出口处。

可得小孔射流速度 $v_b = \sqrt{2gh}$

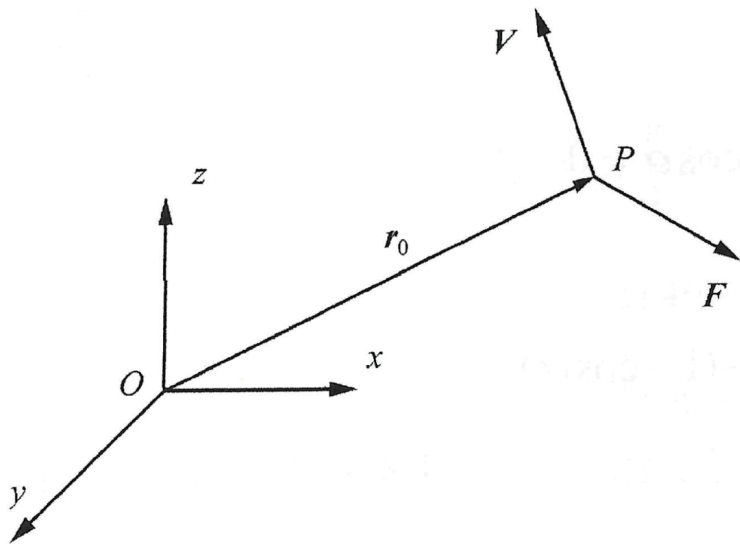
动量随时间变化率 $\frac{dK}{dt} = \rho q v_b$

容器受到的反推力 $F_x = -\rho q v_b$

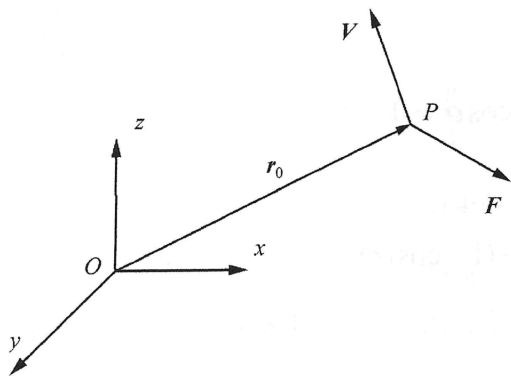
请思考

如何求解流体与固体之间的相互作用力矩？

角动量方程



角动量方程



如图所示, 力 F 对距离 P 点矢径为 r_o 的空间点 O 的力矩为 M_o 。

力矩 M_o 与流体质点对 O 点的动量矩随时间的变化率相等, 即

$$\vec{M}_o = \vec{r}_o \times \vec{F} = \frac{d}{dt} \left[\vec{r}_o \times (m_p \vec{V}) \right]$$

由角动量定理可知: 作用在流体系统上的净力矩等于流体系统角动量对时间的导数, 即

$$\sum (\vec{M}_o)_s = \frac{d}{dt} \int_{m_s} (\vec{r}_o \times \vec{V}) dm \quad \Leftarrow \quad \text{运动流体对固定空间点的动量矩方程}$$

这时候, 我们看到了 $\frac{d}{dt} \int_{m_s} *** dm$ 。请问: 你想到了什么? 我们应该想到什么?

角动量方程

应用雷诺输运定理，把对**系统**的方程转换成对**控制体**的方程

令

$$B = \int_{m_s} (\vec{r}_o \times \vec{V}) dm, \quad \beta = \frac{dB}{dm} = \vec{r}_o \times \vec{V}$$

代入

$$\left(\frac{dB}{dt} \right)_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} \beta \rho dV + \int_{cs} \beta \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

于是

$$\frac{d}{dt} \int_{m_s} (\vec{r}_o \times \vec{V}) dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} (\vec{r}_o \times \vec{V}) \rho dV + \int_{cs} (\vec{r}_o \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

最终，得**运动流体对固定空间点的动量矩方程**（以控制体视角）

$$\sum (\vec{M}_o)_s = \frac{\partial}{\partial t} \int_{cv} (\vec{r}_o \times \vec{V}) \rho dV + \int_{cs} (\vec{r}_o \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

角动量方程：定常流动的角动量方程

对定常流动

$$\frac{d}{dt} \int_{cv} (\vec{r}_o \times \vec{V}) \rho dV = 0$$

则

定常流动的动量矩方程

$$\sum (\vec{M}_o)_s = \int_{cs} (\vec{r}_o \times \vec{V}) \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA$$

由于推导雷诺输运方程时，初始时刻控制体与系统是重合的，故而 $\sum (M_0)_s$ 可视为作用在控制体内部质点上所有力产生的力矩之和。

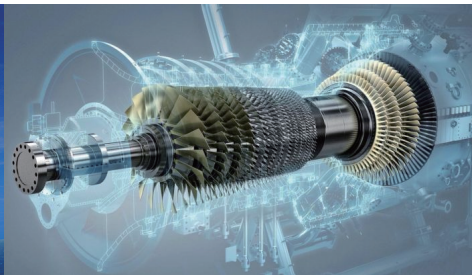
定常流动的动量矩方程：作用在控制体内部质点上所有力矩之矢量和等于流入、流出控制体各面的净动量矩流率。

角动量方程：定常流动的角动量方程

对具有若干均匀速度进出口的控制体，定常流动的动理矩方程为

特定控制体：定常流动的动量矩方程

$$\sum (\vec{M}_o)_s = \sum \left[\left(\vec{r}_o \times \vec{V} \right) (\rho V_n A) \right]_{\text{out}} - \sum \left[\left(\vec{r}_o \times \vec{V} \right) (\rho V_n A) \right]_{\text{in}}$$



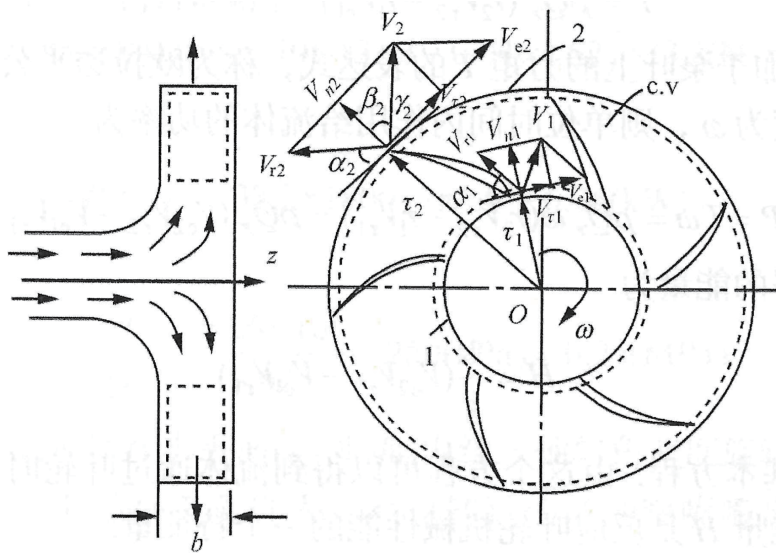
角动量方程的应用：解题注意事项

角动量方程解题注意事项

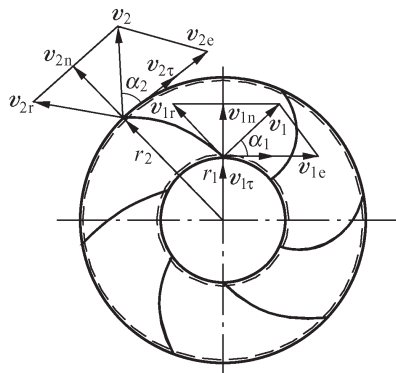
步骤类似于动量定理的应用：

- ① 当流体通过旋转通道时，流体的绝对速度为相对速度与牵连速度的矢量和；
- ② 绝对速度用于计算角动量；
- ③ 相对速度用于计算流速或流量；
- ④ 相对速度的方向取决于通道的型线。

角动量方程的应用：叶轮机械



角动量方程的应用：叶轮机械



离心泵叶轮内的流动

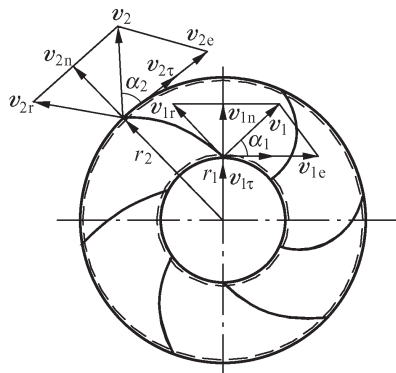
定常流动角动量方程可以表示为

$$\int_{cs} \rho(\vec{r} \times \vec{v})v_n dA = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \Rightarrow \text{外力矩矢量和}$$

取图中虚线包体积为控制体 $\left[\sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) \right]_z = M_z$
 M_z 为转轴传给叶轮的力矩。

$$\begin{aligned} & \left[\int_{cs} \rho(\vec{r} \times \vec{v})v_n dA \right]_z \\ &= \int_{A_2} \rho v_2 r_2 \cos \alpha_2 v_{2n} dA - \int_{A_1} \rho v_1 r_1 \cos \alpha_1 v_{1n} dA \\ &= \rho v_2 r_2 \cos \alpha_2 v_{2n} A_2 - \rho v_1 r_1 \cos \alpha_1 v_{1n} A_1 \\ &= \rho Q_V (r_2 v_{2\tau} - r_1 v_{1\tau}) \end{aligned}$$

角动量方程的应用：叶轮机械



离心泵叶轮内的流动

力矩:

$$M_z = \rho Q_V (r_2 v_{2\tau} - r_1 v_{1\tau})$$

在一些文献或题目中，也有人用 T 表示力矩。

功率:

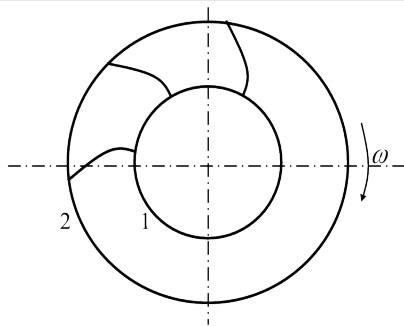
$$P = M_z \omega = \rho Q_V (v_{2e} v_{2\tau} - v_{1e} v_{1\tau})$$

涡轮机械的基本方程:

$$H = \frac{1}{g} (v_{2e} v_{2\tau} - v_{1e} v_{1\tau})$$

这就是单位重量流体获得的能量。

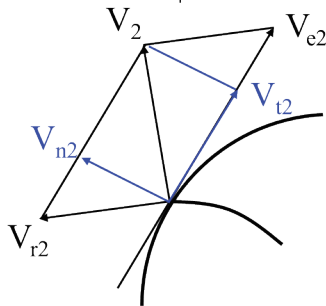
角动量方程的应用：例题



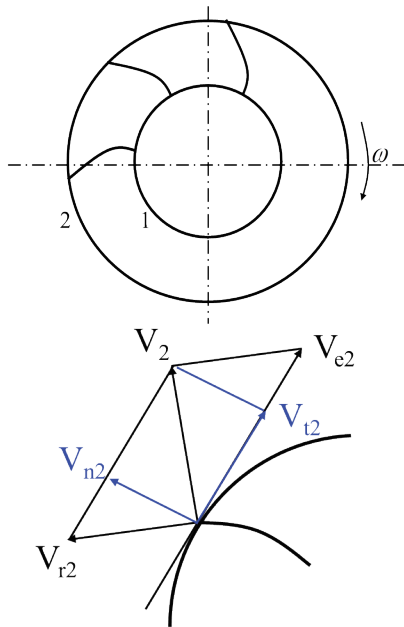
例：已知水通过等速旋转的泵叶，不考虑流动损失，进出口截面上的参数均匀，流量为 Q_V 。

求：1) 维持泵叶旋转所需要施加的力矩 T ；2) 泵叶消耗的功率 P ；3) 增加的压强 Δp 。

解：泵叶出口速度分析——只分析增加的压强



角动量方程的应用：例题



例：已知水通过等速旋转的泵叶，不考虑流动损失，进出口截面上的参数均匀，流量为 Q_V 。

求：1) 维持泵叶旋转所需要施加的力矩 T ；2) 泵叶消耗的功率 P ；3) 增加的压强 Δp 。

解：泵叶出口速度分析——**只分析增加的压强**

流体经过离心式泵的泵叶通道，增加的机械能主要表现为压强的增加。

因此，可用伯努利方程表示如下

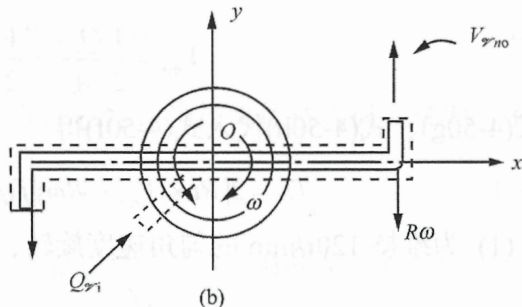
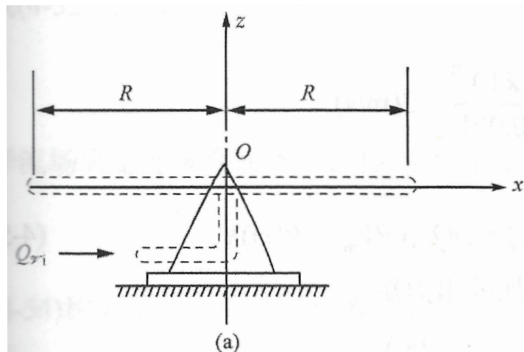
$$gz_1 + \frac{V_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + \frac{P/Q_V}{\rho} = gz_2 + \frac{V_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho}$$

$$\because z_1 \approx z_2, \quad V_1 \approx V_2 \quad \therefore p_2 - p_1 = \Delta p = \frac{P}{Q_V}$$

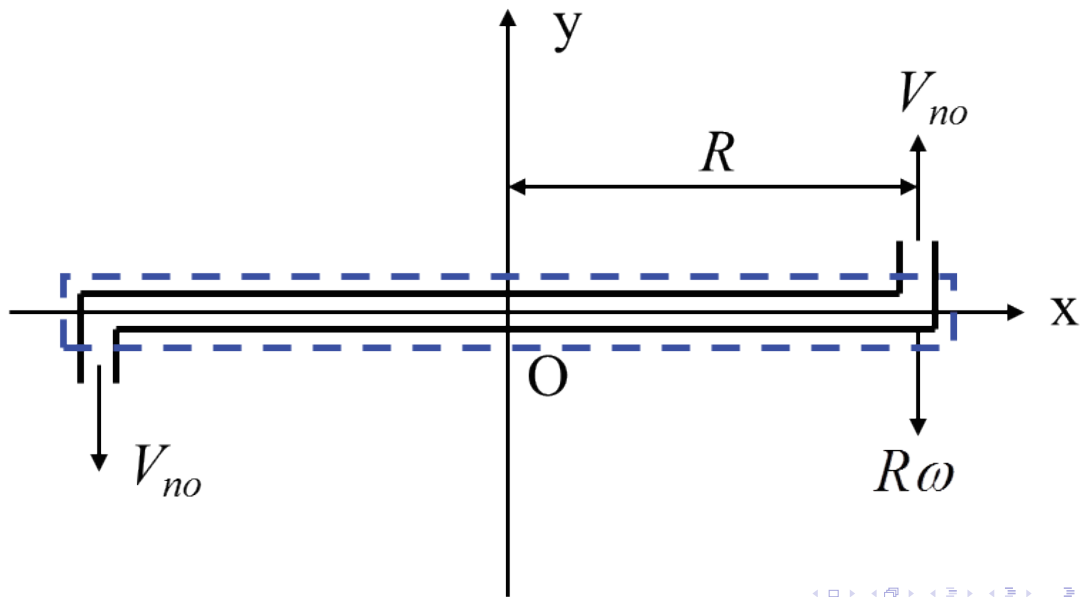
角动量方程的应用：例题

例：已知草坪洒水器在水平面 (xy 平面) 绕 z 轴匀角速度旋转，转速为 120r/min 。水从中心垂直管进入，经过转臂两端的喷嘴喷出，进水流量 $Q_{\text{in}} = 0.006\text{ m}^3/\text{s}$ ，喷嘴出口截面积 $A_o = 0.001\text{ m}^2$ ，洒水器臂长 $R = 0.2\text{ m}$ ，水的密度 $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ 。

求：(1) 为使洒水器维持 120 r/min 的匀角速度旋转，外界需加的阻力矩为多少；
 (2) 如取阻力矩为零，则洒水器的旋转角速度将增至多少？



角动量方程的应用：例题



角动量方程的应用：例题

解：选择坐标系如图所示， z 坐标为喷水器的旋转轴。围绕喷水器选取控制体。作用在控制体上力矩的矢量和为

$$\sum M_O = \mathbf{r}_O \times \mathbf{F}_s + \mathbf{r}_O \times \mathbf{F}_m + \mathbf{T}$$

式中，

$\mathbf{r}_O \times \mathbf{F}_s$ 是表面力对 O 点的力矩。控制体四周均匀大气压产生对中心(旋转轴)的力矩之和为零。

$\mathbf{r}_O \times \mathbf{F}_m$ 是质量力对 O 点的力矩。由于质量力对旋转轴 O 点对称，所以由质量力引起的力矩之和亦为零。

$\mathbf{T}$ 为外界对控制体施加的力矩并设沿 z 轴为正向为正，则 $\mathbf{T} = T\mathbf{k}$ 。

综上所述，作用在控制体上力矩的矢量和可表示为 $\sum M_O = T\mathbf{k}$ 。

角动量方程的应用：例题

本题有一个进口和两个出口，根据流动的对称性及连续性方程，出口流量可取为

$$Q_{\psi o} = Q_{\psi o1} = Q_{\psi o2} = \frac{1}{2}Q_{\psi i}$$

根据本题条件，动量矩的通量项可展开为

$$\int_{CS} (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_{o1} \rho Q_{\psi o1} + (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_{o2} \rho Q_{\psi o2} - (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_i \rho Q_{\psi i}$$

式中，下标“o”表示出口，“i”表示进口；对进口， $\mathbf{r}_{Oi} = 0$ ，所以 $(\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_i = 0$ ，即进口的动量矩为零。出口的动量矩是对称的，故

$$(\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_{o1} \rho Q_{\psi o1} = (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_{o2} \rho Q_{\psi o2} = (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_o \rho Q_{\psi o}$$

所以，**进出口动量矩**可表示为

$$\int_{CS} (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V}) \rho (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dA = 2 (\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_o \rho Q_{\psi o}$$

角动量方程的应用：例题

将力矩的矢量和、进出口动量矩代入动量矩方程, 可得新的动量矩方程

$$T\mathbf{k} = 2(\mathbf{r}_O \times \mathbf{V})_O \rho Q_{\psi_O}$$

$(\mathbf{r}_O)_O$ 为喷嘴出口到 O 点的力臂, 以洒水器的右臂为例

$$(\mathbf{r}_O)_O = R\mathbf{i} = 0.2\mathbf{i}$$

$\mathbf{V}_O$ 为喷嘴出口处水的绝对速度, 等于水在洒水器出口的相对速度减去喷嘴运动的牵连速度, 即

$$\mathbf{V}_O = (V_{no} - R\omega)\mathbf{j}$$

式中

$$V_{no} = \frac{1}{2} \frac{Q_{\psi_i}}{A_O} = \frac{1}{2} \times \frac{6 \times 10^{-3}}{0.001} = 3 \text{ (m/s)}$$

将喷嘴出口到 O 点的力臂、喷嘴出口处水的绝对速度代入新的动量矩方程得

$$T\mathbf{k} = 2[R\mathbf{i} \times (V_{no} - R\omega)\mathbf{j}] \rho Q_{\psi_O} = \rho Q_{\psi_i} (RV_{no} - R^2\omega)\mathbf{k}$$

角动量方程的应用：例题

(1) 为维持 120 r/min 的匀角速度旋转, 需加的阻力矩

$$T\mathbf{k} = 1000 \times 6 \times 10^{-3} \left(0.2 \times 3 - 0.2^2 \times 120 \times \frac{2\pi}{60} \right) \mathbf{k} = 0.584(\text{N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

要对控制体施加逆时针的力矩 $T = 0.588 \text{ N} \cdot \text{m}$, 才能使洒水器以 120r/min 的转速匀角速度旋转。

(2) 阻力矩为零时, $T = 0$, 由式 $T\mathbf{k} = \rho Q_{\psi_i} (RV_{no} - R^2\omega) \mathbf{k}$ 得

$$\omega = \frac{V_{no}}{R} = \frac{Q_{\psi_i}}{2A_o R} = \frac{6 \times 10^{-3}}{2 \times 0.001 \times 0.2} = 15(\text{rad/s})$$

转速

$$n = \frac{\omega}{2\pi} \times 60 = \frac{15 \times 60}{2\pi} = 143.24(\text{r/min})$$

提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

微分形式的守恒方程 · NAVIER-STOKES方程组

Chapter04_FluidDynBasicEqs.pdf

微分方程及其定解条件: 例题

例: 某速度场为 $u = \frac{10y}{x^2 + y^2}, v = -\frac{10x}{x^2 + y^2}, w = 0$, 流动介质是密度为 $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ 的空气. 不考虑流动损失, 试确定重力作用下的压强梯度 (设 z 轴竖直向上).

解: 不考虑流动损失, 则假定为理想流体流动. 根据欧拉运动微分方程, 有

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x}, \quad f_x = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\rho \frac{Du}{Dt} = -\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ &= -1.23 \left[\frac{10y}{x^2 + y^2} \frac{-20xy}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2 + y^2} \frac{(x^2 + y^2) 10 - 10y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{123x}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

微分方程及其定解条件: 例题

例: 某速度场为 $u = \frac{10y}{x^2 + y^2}$, $v = -\frac{10x}{x^2 + y^2}$, $w = 0$, 流动介质是密度为 $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ 的空气. 不考虑流动损失, 试确定重力作用下的压强梯度 (设 z 轴竖直向上).

解:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y}, \quad f_y = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= -\rho \frac{Dv}{Dt} = -\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ &= -1.23 \left[\frac{10y}{x^2 + y^2} \frac{(x^2 + y^2)(-10) + 10x(2x)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-10x}{x^2 + y^2} \frac{20xy}{(x^2 + y^2)^2} \right] \\ &= \frac{123y}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

微分方程及其定解条件: 例题

例: 某速度场为 $u = \frac{10y}{x^2 + y^2}, v = -\frac{10x}{x^2 + y^2}, w = 0$, 流动介质是密度为 $\rho = 1.23 \text{ kg/m}^3$ 的空气. 不考虑流动损失, 试确定重力作用下的压强梯度 (设 z 轴竖直向上).

解:

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z}, \quad f_z = -g$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g = -1.23 \times 9.81 = -12.07 (\text{Pa/m})$$

$$\begin{aligned} \nabla p &= \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= \frac{123}{(x^2 + y^2)^2} (x \mathbf{i} + y \mathbf{j}) - 12.07 \mathbf{k} (\text{Pa/m}) \end{aligned}$$

微分方程及其定解条件: 例题

例: 试证明重力作用下的二维气体流场 $u = a(x^2 - y^2)$, $v = -2axy$, $w = 0$ 是 N-S 方程的精确解, 并求出它的压强分布规律. 假定气体密度 ρ 不变, z 轴坚直向上.

解: 将流速 (u, v, w) 代入 N-S 方程

x 方向:

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \rho f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho [0 + a(x^2 - y^2)2ax - 2axy(-2ay)] = \rho \times 0 - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu(2a - 2a + 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -2a^2\rho(x^3 + xy^2)$$

微分方程及其定解条件: 例题

例: 试证明重力作用下的二维气体流场 $u = a(x^2 - y^2)$, $v = -2axy$, $w = 0$ 是 N-S 方程的精确解, 并求出它的压强分布规律. 假定气体密度 ρ 不变, z 轴坚直向上.

解: 将流速 (u, v, w) 代入 N-S 方程

y 方向:

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = \rho f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho [0 + a(x^2 - y^2)(-2ay) + (-2axy)(-2ax)] = \rho \times 0 - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu(0 + 0 + 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -2a^2 \rho (x^2 y + y^3)$$

微分方程及其定解条件: 例题

例: 试证明重力作用下的二维气体流场 $u = a(x^2 - y^2)$, $v = -2axy$, $w = 0$ 是 N-S 方程的精确解, 并求出它的压强分布规律. 假定气体密度 ρ 不变, z 轴坚直向上.

解: 将流速 (u, v, w) 代入 N-S 方程

z 方向:

$$\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \rho f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)$$

$$\rho(0 + 0 + 0 + 0) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu(0 + 0 + 0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

微分方程及其定解条件: 例题

例: 试证明重力作用下的二维气体流场 $u = a(x^2 - y^2)$, $v = -2axy$, $w = 0$ 是 N-S 方程的精确解, 并求出它的压强分布规律. 假定气体密度 ρ 不变, z 轴坚直向上.

解: 从 x 和 z 方向的压强梯度可知, 虽然流体的黏性不等于零, $\mu \neq 0$, 但黏性项可不予考虑. 那么二维流场是否满足 N-S 方程呢?

针对 y 和 x 方向的压强梯度 分别对 y 和 x 求导

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) = -2a^2 \rho (2xy) = -4a^2 \rho xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right) = -2a^2 \rho (2xy) = -4a^2 \rho xy$$

由于以上两式相同, 所以已知二维速度场满足 N-S 方程, 即该二维速度 N-S 方程的精确解.

微分方程及其定解条件: 例题

对 z 方向压强梯度表达式积分, 可得流场的压强分布

$$p = -\rho g z + f(x, y)$$

其中, $f(x, y)$ 是积分常数. 将上式对 x 求导, 代入式 x 方向压强梯度表达式, 得

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = -2a^2 \rho (x^3 + xy^2)$$

对 x 积分, 得

$$f(x, y) = -2a^2 \rho \left(\frac{x^4 + 2x^2 y^2}{4} \right) + f(y)$$

$f(y)$ 是积分常数. 将上式对 y 求导, 代入式 y 方向压强梯度表达式, 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -2a^2 \rho x^2 y + f'(y) = -2a^2 \rho (x^2 y + y^3) \\ f'(y) &= -2a^2 \rho y^3 \end{aligned}$$

微分方程及其定解条件: 例题

对 y 积分, 得

$$f(y) = -\frac{1}{2}a^2\rho y^4 + C$$

C 是积分常数. 将上式代入 $f(x, y)$, 再代入含 $f(x, y)$ 的流场压强表达式, 得

$$p = -\rho gz - \frac{1}{2}a^2\rho(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + C$$

上式便是压强分布表达式. 由于

$$V^2 = u^2 + v^2 = [a(x^2 - y^2)]^2 + (-2axy)^2 = a^2(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

那么, 压强分布表达式可改写为

$$p = -\rho gz - \frac{1}{2}\rho V^2 + C, \quad \text{或} \quad \frac{p}{\rho} + gz + \frac{1}{2}V^2 = C'$$

提纲

- ① 流体流动的连续性方程
- ② 理想流体的能量方程
- ③ 伯努利方程及其应用
- ④ 动量方程与动量矩方程
- ⑤ 微分方程及其定解条件
- ⑥ 总结与思考

习题作业

- 4-3 、 4-5 、 4-8 、 4-11、 4-14、 4-15
- 4-24、 4-29、 4-33、 4-34、 4-35、 4-39

Thanks!
Welcome Questions