

工程流体力学 · 量纲分析与相似原理

ENGINEERING FLUID MECHANICS · DIMENSIONAL ANALYSIS AND SIMILARITY

孙东科

dksun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院，江苏南京
School of Mechanical Engineering, Southeast University, China

Dimensional Analysis and Similarity

① 量纲分析

量纲分析基础知识

量纲分析 · 瑞利法

Buckingham π 定理

② 相似原理

几何相似

运动相似

动力相似

流动相似

③ 模拟试验

④ 总结与思考

量纲分析 · 引言

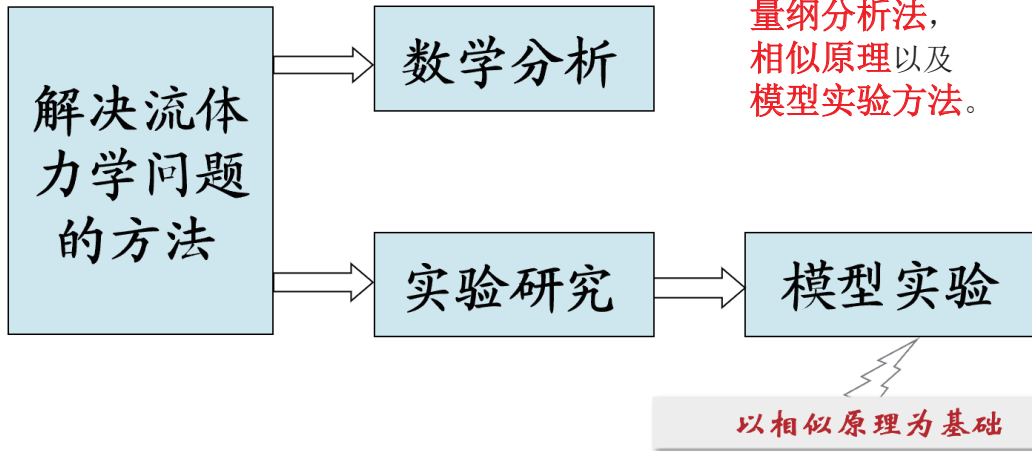
■ 飞机模型实验

■ 舰船流阻实验

■ 三峡水利大坝



- 能够用数学分析方法求解的流体力学问题是有限的，而且理论求解结果一般还需要通过实验来验证。
- 流体力学中的许多问题都是采用理论分析与实验研究相结合的方法而解决的。



提纲

① 量纲分析

量纲分析基础知识

量纲分析 · 瑞利法

Buckingham π 定理

② 相似原理

几何相似

运动相似

动力相似

流动相似

③ 模拟试验

④ 总结与思考

量纲分析 · 基础知识

作用与意义

某一流体不能用微分方程确定物理量之间的关系，量纲分析法是有效的方法。

量纲的定义

量纲分析 · 基础知识

作用与意义

某一流体不能用微分方程确定物理量之间的关系，量纲分析法是有效的方法。

量纲的定义

量纲是用以度量不同种类物理量的单位。例如：小时、分、秒是不同的时间测量单位，但都是表示时间的，属于同一量纲[T]。

量纲分析 · 基础知识

基本量纲

- 在国际单位制中，取时间、长度、质量、物质的量、热力学温度、电流强度、发光强度作为基本物理量。



相应地用 $[T]$ 、 $[L]$ 、 $[M]$ 、 $[N]$ 、 $[\Theta]$ 、 $[I]$ 、 $[J]$ 表示其量纲，并称之为基本量纲。

量纲公式

流体力学中任一物理量的量纲 $[B] = [L^a M^b T^c]$ $\Leftarrow$ 我们称之为量纲公式。

例如： $[\rho] = [ML^{-3}]$, $[v] = [LT^{-1}]$, $[F] = [MLT^{-2}]$

讨论

- ① 若 a 、 b 、 c 不全为0，则 B 是有量纲的量；当 $a = b = c = 0$ 时，则 B 是无量纲的量，或称无量纲数；
- ② 有些方程中的常数是有量纲的，比如气体常数 R 的量纲为 $[L^2 T^{-2} \Theta^{-1}]$ 。

量纲分析 · 基础知识

量纲齐次原理

一个正确而完整的物理方程，其各项的量纲都是相同的，这一规律称为量纲齐次原理。可用这一原理来校验物理方程和经验公式的正确性和完整性，也可以用来确定公式中物理量的未知指数，还可以用来建立物理方程。。

单位质量流体伯努利方程

$$\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H$$

量纲分析 · 瑞利法

瑞利法假定某一物理过程同 n 个物理量有关，即

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

可将其中的个物理量表示成其他物理量的指数乘积的形式

$$x_i = K x_1^a x_2^b \cdots x_{n-1}^k \quad (1)$$

写出量纲式

$$[x_i] = K [x_1]^a [x_2]^b \cdots [x_{n-1}]^k$$

将量纲式中各物理量的量纲

- ① 按照式 (1) 表示为基本量纲的指数乘积形式,
- ② 并根据量纲齐次原理确定指数 $a, b, \dots, k$.

这样就可得出表达物理过程的方程.

量纲分析 · 瑞利法

例: 求水泵输出功率 P 的表达式.

解: 水泵输出功率 P 指单位时间内水泵输出的能量, 与水泵工作相关的物理量有水的重度 W , 流量 Q_v 和扬程 H , 即

$$f(P, W, Q_v, H) = 0$$

写出指数乘积关系式

$$P = KW^a Q_v^b H^c$$

其量纲式为

$$[P] = K[W]^a [Q_v]^b [H]^c$$

以基本量纲 $[M]$ 、 $[L]$ 、 $[T]$ 表示各物理量量纲

$$[ML^2 T^{-3}] = K [ML^{-2} T^{-2}]^a [L^3 T^{-1}]^b [L]^c$$

量纲分析 · 瑞利法

例: 求水泵输出功率 P 的表达式.

解: 根据量纲齐次原理求量纲指数

$$[M]: 1 = a$$

$$[L]: 2 = -2a + 3b + c$$

$$[T]: -3 = -2a - b$$

得

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

由此可得水泵输出功率 N 的方程为 $N = KWQ^\gamma H$

式中, K 为系数, 由实验确定.

由于基本量纲只有三个, 利用量纲齐次原理建立的关系式不超过三个, 故用瑞利法求物理过程的方程时, 相关物理量不超过四个.

量纲分析 · π 定理

Buckingham Pi Theorem, 1914

π 定理: 若某现象由 n 个物理量所描述, 即

$$f(x_1, x_2, \cdots x_n) = 0$$

这 n 个物理量包含 m 个基本量纲, 则该现象可用 $n - m$ 个无量纲数来表示, 即

$$F(\pi_1, \pi_2, \cdots \pi_{n-m}) = 0$$

量纲分析 · π 定理

如何得到 $n - m$ 个无量纲数？

- 在变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中选择 m 个量纲不同的变量作为重复变量。
- 把重复变量与其余变量中的一个组成无量纲数 π_i , 共组成 $(n - m)$ 个无量纲数。

例如：取 x_1 、 x_2 、 x_3 为重复变量, 组成的无量纲数为

$$\pi_1 = x_1^{a_1} x_2^{b_1} x_3^{c_1} x_4$$

$$\pi_2 = x_1^{a_2} x_2^{b_2} x_3^{c_2} x_5$$

...

$$\pi_{n-m} = x_1^{a_{n-m}} x_2^{b_{n-m}} x_3^{c_{n-m}} x_n$$

- 由物理方程量纲齐次原理确定待定指数 a 、 b 、 c 的值, 从而也就确定了每个 π 。

量纲分析 · π 定理

具体应用步骤:

- ① 列出影响该物理现象的全部 n 个变量 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$
- ② 选择 m 个独立变量, 原则是: 要既相互独立又要包含基本量纲 (通常三个)

$$\begin{array}{rcl} \text{一般选} & \Rightarrow & \begin{array}{lll} \text{几何尺度} & l & L & x_n \\ \text{速度} & v & LT^{-1} & x_{n-1} \\ \text{密度} & \rho & ML^{-3} & x_{n-2} \end{array} \end{array}$$

- ③ 从所列变量中选出用 m 个重复变量, 重复变量应包括几何变量、运动变量和动力变量;
- ④ 用重复变量和其余变量中的一个建立无量纲方程, 从而获得 $(n - m)$ 个无量纲数组;
- ⑤ 建立无量纲数组方程, $F(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m}) = 0$, 求解。

量纲分析 · π 定理

例：光滑圆球直径为 D ，在均匀流场中以速度 V 运动，流体的密度为 ρ ，流体的动力黏度为 μ ，试求圆球所受阻力 F 的表达式。

解：根据题意，可按下面几步解题。

- ① 该流动现象共有 $n = 5$ 个变量，列出全部 n 个变量：

$$F、D、V、\rho、\mu;$$

- ② 选择基本量纲数目 $m = 3$ 个： $[M]$ 、 $[L]$ 、 $[T]$ ；

- ③ 选用 $m = 3$ 个重复变量： ρ 、 V 、 D ；

- ④ 组成 $n - m = 5 - 3 = 2$ 个无量纲数；

- ⑤ 建立无量纲数组方程，并求解 π_i 。

量纲分析 · π 定理

组成1个无量纲数，根据量纲齐次原理列方程组，并求解

量纲分析 · π 定理

组成1个无量纲数，根据量纲齐次原理列方程组，并求解

$$\pi_1 = \rho^{a_1} V^{b_1} D^{c_1} F$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [ML^{-3}]^{a_1} [LT^{-1}]^{b_1} [L^{c_1}] [MLT^{-2}]$$

$$\begin{cases} [M] : 0 = a_1 + 1 \\ [L] : 0 = -3a_1 + b_1 + c_1 + 1 \\ [T] : 0 = -b_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

量纲分析 · π 定理

组成1个无量纲数，根据量纲齐次原理列方程组，并求解

$$\pi_1 = \rho^{a_1} V^{b_1} D^{c_1} F$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [ML^{-3}]^{a_1} [LT^{-1}]^{b_1} [L^{c_1}] [MLT^{-2}]$$

$$\begin{cases} [M] : 0 = a_1 + 1 \\ [L] : 0 = -3a_1 + b_1 + c_1 + 1 \\ [T] : 0 = -b_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

再组成1个无量纲数，根据量纲齐次原理列方程组，并求解

量纲分析 · π 定理

组成1个无量纲数，根据量纲齐次原理列方程组，并求解

$$\pi_1 = \rho^{a_1} V^{b_1} D^{c_1} F$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [ML^{-3}]^{a_1} [LT^{-1}]^{b_1} [L^{c_1}] [MLT^{-2}]$$

$$\begin{cases} [M] : 0 = a_1 + 1 \\ [L] : 0 = -3a_1 + b_1 + c_1 + 1 \\ [T] : 0 = -b_1 - 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = -2 \end{cases} \Rightarrow \pi_1 = \frac{F}{\rho V^2 D^2}$$

再组成1个无量纲数，根据量纲齐次原理列方程组，并求解

$$\pi_2 = \rho^{a_2} V^{b_2} D^{c_2} \mu$$

$$[M^0 L^0 T^0] = [ML^{-3}]^{a_2} [LT^{-1}]^{b_2} [L]^{c_2} [ML^{-1} T^{-1}]$$

$$\begin{cases} [M] : 0 = a_2 + 1 \\ [L] : 0 = -3a_2 + b_2 + c_2 - 1 \\ [T] : 0 = -b_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = -1 \\ b_2 = -1 \\ c_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow \pi_2 = \frac{\mu}{\rho V D}$$

量纲分析 · π 定理

通过无量纲数组方程, 并求解 π_i

$$\text{Func} \left(\frac{F}{\rho V^2 D^2}, \frac{\mu}{\rho V D} \right) = 0, \quad \text{即} \quad \frac{F}{\rho V^2 D^2} = \text{func} \left(\frac{\mu}{\rho V D} \right)$$

如果将上式中的阻力 F 写成

$$F = f(\text{Re}) \frac{\rho V^2}{2} \frac{\pi D^2}{4} = C_D \frac{\rho V^2}{2} A$$

式中,

$C_D = f(\text{Re})$ 是与雷诺数 (Re) 有关的阻力系数;

$A = \frac{\pi D^2}{4}$ 是小球的迎流面积;

$\frac{\rho V^2}{2}$ 是流体流动的动压.

量纲分析 · π 定理

例: 不可压缩黏性流体在管内作定常流动时,流体的压降损失 Δp 与管内径 d 、管长 l 、管壁粗糙度 ε 、流体的平均流速 V 、密度 ρ 和黏度 μ 有关。试用无量纲数组表示压降。

解: 1) 列出全部变量, 该现象共有 $n = 7$ 个变量:

$$\Delta p, d, l, \varepsilon, V, \rho, \mu$$

2) 选择基本量纲数目 $m = 3$:

$$M, L, T$$

3) 选用 m 个重复变量:

$$\rho, V, d$$

4) 组成 $n - m = 7 - 3 = 4$ 个无量纲数组

量纲分析 · π 定理

例: 不可压缩黏性流体在管内作定常流动时,流体的压降损失 Δp 与管内径 d 、管长 l 、管壁粗糙度 ε 、流体的平均流速 V 、密度 ρ 和黏度 μ 有关。试用无量纲数组表示压降。

第一个无量纲数 $\pi_1 = \rho^{a_1} V^{b_1} d^{c_1} \Delta p$

$$M^0 L^0 T^0 = (M^{a_1} L^{-3a_1}) (L^{b_1} t^{-b_1}) (L^{c_1}) (ML^{-1}T^{-2})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 + 1 = 0 \\ -3a_1 + b_1 + c_1 - 1 = 0 \\ -b_1 - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -1 \\ b_1 = -2 \\ c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \pi_1 = \frac{\Delta p}{\rho V^2}$$

5) 使用同样的方法, 可求出其余 3 个无量纲数。

量纲分析 · 无量纲数组的形式

- 作用在流体上的力

▶ 惯性力

$$F_{\text{iner}} = ma \propto \rho l^3 \frac{V^2}{l} = \rho V^2 l^2$$

▶ 黏性力

$$F_{\text{vis}} = \tau A \propto \mu \frac{du}{dy} A = \mu \frac{V}{l} l^2 = \mu V l$$

▶ 压力

$$F_{\text{pres}} = \Delta p A \propto \Delta p l^2 \quad \text{或} \quad p l^2$$

▶ 重力

$$F_{\text{grav}} = mg \propto g \rho l^3$$

▶ 表面张力

$$F_{\text{sur}} = \sigma l$$

量纲分析 · 流体力学中常见的无量纲数

(1) 雷诺 (Reynolds) 数

$$\text{Re} = \frac{\rho V l}{\mu} = \frac{\rho V^2 l^2}{\mu V l} = \frac{F_{\text{iner}}}{F_{\text{vis}}}$$

(2) 欧拉 (Euler) 数

$$\text{Eu} = \frac{\Delta p}{\rho V^2} = \frac{\Delta p l^2}{\rho V^2 l^2} = \frac{F_{\text{pres}}}{F_{\text{iner}}}$$

(3) 弗劳德 (Froude) 数

$$\text{Fr} = \frac{V^2}{gl} = \frac{\rho V^2 l^2}{\rho g l^3} = \frac{F_{\text{iner}}}{F_{\text{grav}}}$$

(4) 韦伯 (Weber) 数

$$\text{We} = \frac{\rho V^2 l}{\sigma} = \frac{\rho V^2 l^2}{\sigma l} = \frac{F_{\text{iner}}}{F_{\text{sur}}}$$

量纲分析 · 意义

量纲分析的意义

- 为实验研究工作减少工作量；
- 用于物理量量纲的推导，由量纲齐次原理校验数学方程各项量纲是否正确；
- 确定模型实验的相似条件，指导实验资料整理。



提纲

① 量纲分析

量纲分析基础知识

量纲分析 · 瑞利法

Buckingham π 定理

② 相似原理

几何相似

运动相似

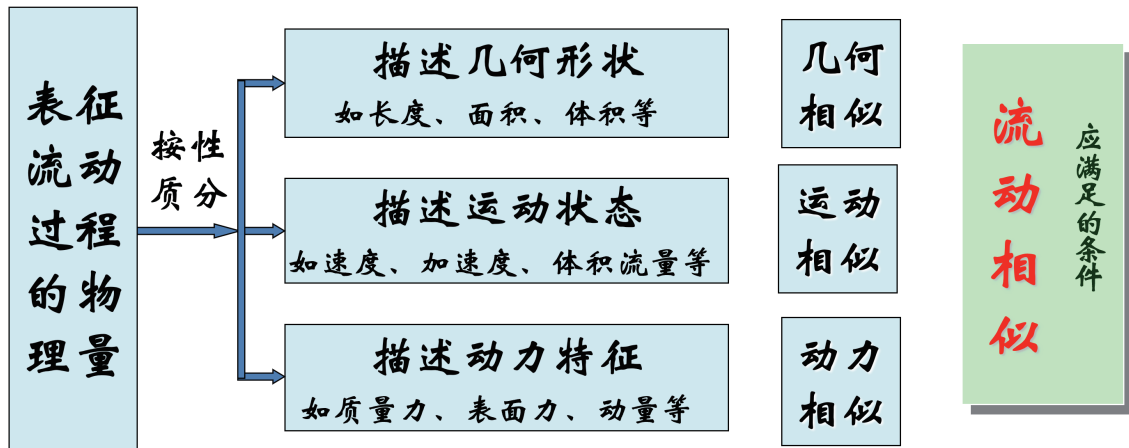
动力相似

流动相似

③ 模拟试验

④ 总结与思考

相似原理



相似原理 · 几何相似: 空间相似

定义：模型和原型的全部对应线形长度的比值为一常数。

$$\frac{L'}{L} = \frac{l'}{l} = \frac{h'}{h} = C_l$$

C_l : 长度比例尺 (相似比例常数)

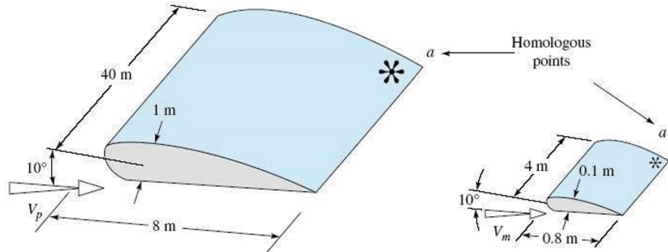
面积比例尺:

$$C_A = \frac{A'}{A} = \frac{l'^2}{l^2} = C_l^2$$

体积比例尺:

$$C_V = \frac{V'}{V} = \frac{l'^3}{l^3} = C_l^3$$

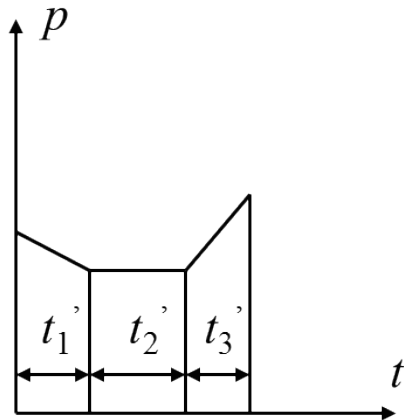
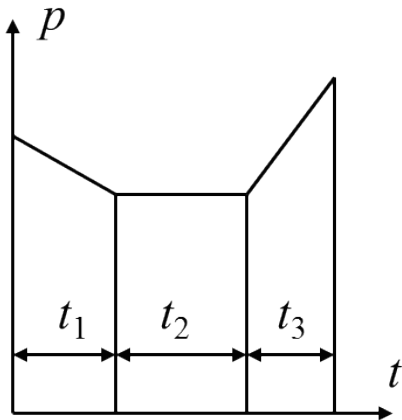
上标 ' 表示模型的有关量。



相似原理 · 几何相似: 时间相似

两种流动状态的压力 (或其它物理量) 变化时间间隔满足下列关系:

$$\frac{t'_1}{t_1} = \frac{t'_2}{t_2} = \frac{t'_3}{t_3} = C_t$$



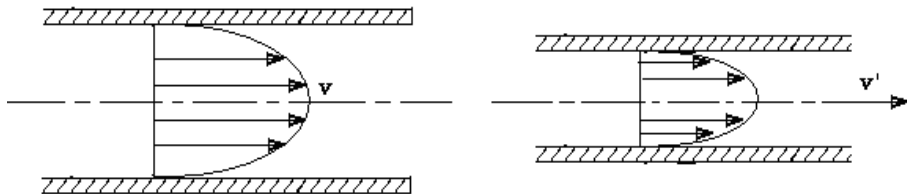
相似原理 · 运动相似

定义：满足几何相似的流场中，对应时刻、对应点流速（加速度）的方向一致，大小的比例相等，即它们的速度场（加速度场）相似。

速度比例常数 $\frac{V'_1}{V_1} = \frac{V'_2}{V_2} = \frac{V'_3}{V_3} = C_v$

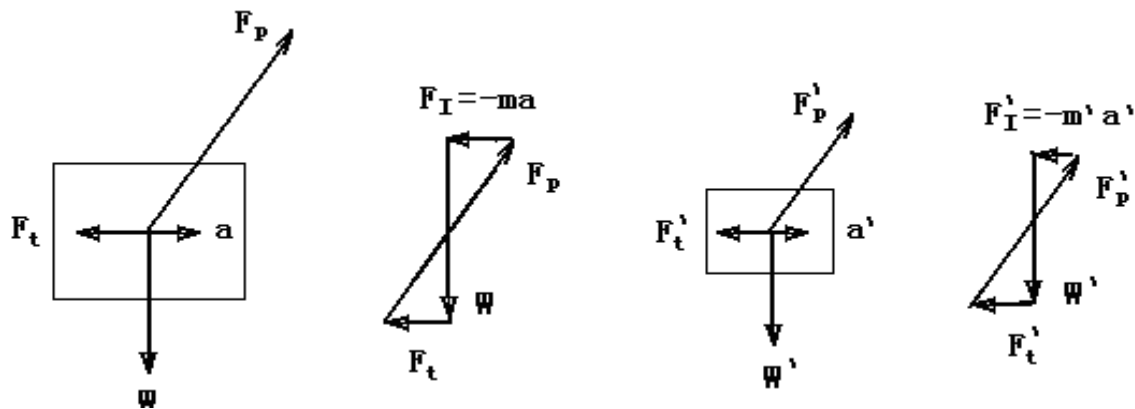
加速度比例常数 $C_a = \frac{C_v}{C_t} = \frac{C_v^2}{C_l}$

流量比例常数 $C_Q = \frac{C_l^3}{C_1} = C_v C_l^2$



相似原理 · 动力相似

定义：两个运动相似的流场中，对应空间点上、对应瞬时作用在两几何相似微团上的力，方向一致、大小互成比例，即它们的动力场相似。



相似原理 · 动力相似

力的比例尺

$$C_F = \frac{F'_p}{F_p} = \frac{F'_t}{F_t} = \frac{W'}{W} = \frac{F'_I}{F_I}$$

又由牛顿定律可知

$$C_F = \frac{\rho' l'^3 \frac{v'}{t'}}{\rho l^3 \frac{v}{t}} = \frac{\rho' l'^2 v'^2}{\rho l^2 v^2} = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

其中: $C_\rho = \frac{\rho'}{\rho}$ 为流体的密度比例尺。

当确定了模型与原型的密度比例尺、长度比例尺和速度比例尺，就可以确定所有动力学的比例尺。

相似原理 · 动力相似

根据力的比例尺 $C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$ 进而可得

力矩 (功, 能) 比例尺:

$$C_M = \frac{M'}{M} = \frac{F'l'}{Fl} = C_F C_l = C_\rho C_l^3 C_v^2$$

压强 (应力) 比例尺:

$$C_p = \frac{p'}{p} = \frac{F_p'/A'}{F_p/A} = \frac{C_F}{C_A} = C_\rho C_v^2$$

功率比例尺:

$$C_P = \frac{P'}{P} = \frac{F'v'}{Fv} = C_F C_v = C_\rho C_l^2 C_v^3$$

动力黏度比例尺:

$$C_\mu = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{\rho'v'}{\rho v} = C_\rho C_v = C_\rho C_l C_v$$

相似原理 · 动力相似: 牛顿数

定义：在几何相似的条件下，两种物理现象保证相似的条件或准则。

$$\frac{C_F}{C_\rho C_l^2 C_v^2} = 1$$

或:

$$\frac{F'}{\rho' l'^2 v'^2} = \frac{F}{\rho l^2 v^2} \Rightarrow \frac{F}{\rho l^2 v^2} = Ne$$

令

$$Ne := \frac{F}{\rho l^2 v^2}$$

Ne 称为牛顿数，它是作用力与惯性力的比值。

当模型与原型动力相似，则其牛顿数必定相等，即 $Ne' = Ne$ ，反之亦然。这就是牛顿相似准则。

相似原理 · 相似准则

相似准则

流场中有各种性质的力，但不论是哪种力，只要两个流场动力相似，它们都要服从牛顿相似准则。



- ① 重力相似准则 (弗苏德准则)
- ② 黏性力相似准则 (雷诺准则)
- ③ 压力相似准则 (欧拉准则)
- ④ 表面张力相似准则(韦伯准则)

相似原理 · 相似准则: 重力相似准则

一、重力相似准则

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

$$\text{重力比 } C_F = \frac{W}{W} = \frac{\rho' V' g'}{\rho V g} = C_\rho C_l^3 C_g$$

$$\frac{C_v}{(C_l C_g)^{1/2}} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{v'}{(g' l')^{1/2}} = \frac{v}{(g l)^{1/2}}$$

令 $\frac{v}{(g l)^{1/2}} = Fr$, 并称之为弗劳德数, 它是惯性力与重力的比值。

当模型与原型重力相似, 则其弗劳德数必定相等, 反之亦然。这就是重力相似准则(弗劳德准则)。在重力场中

$$g' = g, C_g = 1 \quad \Rightarrow \quad C_v = C_l^{1/2}$$

相似原理 · 相似准则: 黏性力相似准则

二、黏性力相似准则

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

黏性力比

$$C_F = C_\mu C_l C_v, \quad C_\rho C_v C_l / C_\mu = 1, \quad C_v C_l / C_v = 1$$

或

$$\frac{\rho' v' l'}{\mu'} = \frac{\rho v l}{\mu}, \quad \frac{v' l'}{\nu'} = \frac{v l}{\nu}$$

令 $\frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = \text{Re}$, 并称之为雷诺数, 它是惯性力与黏性力的比值。

当模型与原型的黏性力相似, 则其雷诺数必定相等, 反之亦然。这就是黏性力相似准则 (雷诺准则)。当模型与原型用同一种流体时

$$C_\rho = C_\mu = 1 \quad \Rightarrow \quad C_v = 1/C_l$$

相似原理 · 相似准则: 压力相似准则

三、压力相似准则

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

压力比 $C_F = \frac{F'}{F} = \frac{p' A'}{p A} = C_p C_l^2$

$$\frac{C_p}{C_\rho C_v^2} = 1 \quad \text{或} \quad \frac{p'}{\rho' v'^2} = \frac{p}{\rho v^2}$$

令 $\frac{p}{\rho v^2} = Eu$, 并称之为欧拉数, 它是总压力与惯性力的比值。

当模型与原型压力相似, 则其欧拉数必定相等, 反之亦然。这就是压力相似准则 (欧拉准则)。当压强用压差代替:

欧拉数: $Eu = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$ 欧拉相似准则: $\frac{\Delta p'}{\rho' v'^2} = \frac{\Delta p}{\rho v^2}$

相似原理 · 相似准则: 表面张力相似准则

四、表面张力相似准则

$$C_F = C_\rho C_l^2 C_v^2$$

表面张力比 $C_F = \frac{F'_\sigma}{F_\sigma} = \frac{\sigma' l'}{\sigma l} = C_\sigma C_l$

$$C_\rho C_l C_v^2 / C_\sigma = 1 \quad \text{或} \quad \frac{\rho' v'^2 l'}{\sigma'} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$$

令 $\frac{\rho v^2 l}{\sigma} = We$, 并称之为韦伯数, 它是惯性力与表面张力的比值。

当模型与原型表面张力相似, 则其韦伯数必定相等, 即 $We' = We$ 反之亦然。这就是表面张力相似准则 (韦伯准则)。

以上给出的牛顿数、弗劳德数、雷诺数、欧拉数、韦伯数均称为相似准则数。

相似原理 · 相似准则：相似转换法

相似转换法

利用两相似现象具有特定相似倍数的性质，将相似倍数表达式代入微分方程进行相似转换，得出相似准则。

相似转换法具体步骤如下：

- ① 列出描述现象的基本微分方程组和全部单值条件；
- ② 写出相似倍数的表达式；
- ③ 将相似倍数的表达式代入微分方程进行相似转换；
- ④ 根据两个流动相似，描述它们的方程相同这一原则，导出相似准则。

相似原理 · 相似准则: 相似转换法

例: 以流体质点直线运动为例用相似转换法导出相似准则。

解: 流体质点做直线运动, 对应的速度方程为

$$V = \frac{dl}{dt}$$

与其相似的流动中, 流体质点的速度方程为

$$V' = \frac{dl'}{dt'}$$

由于两流动现象相似, 有

$$V' = C_V V, \quad l' = C_l l, \quad t' = C_t t$$

联立上述两个方程, 整理后得

$$\frac{C_V C_t}{C_l} V = \frac{dl}{dt}$$

相似原理 · 相似准则: 相似转换法

$$\frac{C_V C_t}{C_l} V = \frac{dl}{dt}$$

上式说明各相似倍数不是任意选取的, 而是受上式约束的. 将上式变换得

$$\frac{Vt}{l} = \frac{V't'}{l'} \quad \text{即} \quad Sr = Sr'$$

可以看出, 对于流体质点直线运动, 若流动相似, 原型和模型流动的 Sr 必相等, Sr 是描述非定常 (不稳定) 流动的相似准则.

同时, Sr 又是一个量纲一量, Sr 与 Fr 、 Eu 、 Re 等量纲一量在相似原理中就称为相似准则或相似判据, 是判断现象是否相似的根据. 可见, 彼此相似的现象, 必定具有数值相等的相似准则.

相似原理 · 相似准则: 方程无量纲化

方程无量纲化

利用现有的描述流动过程的微分方程, 通过使其无量纲化, 从而求出相似准则。

方程量无量纲化是这种方法不需要两个相似流动的比较, 具体步骤如下:

- ① 列出描述现象的基本微分方程组;
- ② 将所有变量量纲一化;
- ③ 将微分方程量纲一化;
- ④ 导出相似准则。

相似原理 · 相似准则: 方程无量纲化

例: 以二维不可压缩黏性流体流动为例, 用方程量纲一化方法导出相似准则。

解: (1) 列出二维不可压缩黏性流体流动微分方程组, 该方程组由连续性方程和运动方程组成.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{cases}$$

(2) 用特征量除各变量, 使各变量成为量纲一量. 特征量为: 特征长度 l , 速度 V , 压降 Δp , 时间 τ , 用带 “*” 的量表示量纲一量, 则

$$x^* = \frac{x}{l}; \quad y^* = \frac{y}{l}; \quad u^* = \frac{u}{V}; \quad v^* = \frac{v}{V}; \quad p^* = \frac{p}{\Delta p}; \quad t^* = \frac{t}{\tau}$$

相似原理 · 相似准则: 方程无量纲化

(3) 将各量纲一量代入方程组, 实现方程组量纲一化. 为了说明方程的量纲一化过程, 以下面两项为例:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u^* V \cdot \frac{\partial (u^* V)}{\partial (x^* l)} = u^* \cdot \frac{V^2}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial (y^* l)} \left(\frac{\partial (u^* V)}{\partial (y^* l)} \right) = \frac{V}{l^2} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}}$$

即将原变量用特征量和量纲一量的乘积代入N-S方程组, 得到

$$\begin{cases} \frac{V}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V}{l} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ \frac{\rho V}{\tau} \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{l} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) = -\frac{\Delta p}{l} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu V}{l^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\rho V}{\tau} \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + \frac{\rho V^2}{l} \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) = -\rho g - \frac{\Delta p}{l} \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{\mu V}{l^2} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{cases}$$

相似原理 · 相似准则: 方程无量纲化

经整理, 将各项变成量纲一量, 得

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0 \\ \left[\frac{l}{\tau V} \right] \frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = - \left[\frac{\Delta p}{\rho V^2} \right] \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \left[\frac{\mu}{\rho V l} \right] \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \left[\frac{l}{\tau V} \right] \frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = - \left[\frac{gl}{V^2} \right] - \left[\frac{\Delta p}{\rho V^2} \right] \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \left[\frac{\mu}{\rho V l} \right] \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \end{array} \right.$$

(4) 导出相似准则.

从以上方程组可以看到, 方程量纲一化后,

- 方程中各变量都成为带 “*” 的量纲一量, 而且由于方程中各项均为量纲一量,
- 则与各带 “*” 的量纲一量相乘的方括号中各项也为量纲一量, 即相似准则.

相似原理 · 相似准则: 方程无量纲化

这些相似准则与在量纲分析中得到的量纲一量相同, 它们是

$$\frac{\mu}{\rho V l} = Re^{-1} \quad \text{雷诺准则}$$

$$\frac{gl}{V^2} = Fr \quad \text{弗劳德准则}$$

$$\frac{\Delta p}{\rho V^2} = Eu \quad \text{欧拉准则}$$

$$\frac{l}{\tau V} = Sr^{-1} \quad \text{斯特劳哈尔准则}$$

因此, 如果两个流体的流动由这个方程组所描述, 且四个相似准则即 Re 、 Eu 、 Fr 、 Sr 都各自相等, 那么这两个流动是相似的。

同一种类现象, 能够用同一微分方程所描述; 单值条件相似, 由微分方程和单值条件中的物理量所组成的相似准则在数值上相等。

相似原理 · 流动相似

流动相似

模型与原型的流场在对应点上、对应瞬时，所有物理量都成比例。



流动相似必然满足以下条件：

- ① 任何相似的流动都是属于同一类的流动，相似流场对应点上的各种物理量，都应为相同的微分方程所描述。
- ② 相似流场对应点上的各种物理量都有唯一确定的解，即流动满足单值条件。
- ③ 由单值条件中的物理量所确定的相似准则数相等是流动相似也必须满足的条件。

相似原理 · 流动相似

相似原理的表述

- 相似现象应遵循同一规律，可用同一微分方程描述；
- 由微分方程的求解知，相似现象的单值条件应相似；
- 因相似现象的物理量成比例关系，而物理量必须满足同一方程，所以物理量的比值要受到约束。

两种流动现象相似的充要条件

- 同一类现象，能用同一微分方程描述；
- 单值条件相似；
- 由单值条件中物理量组成的相似准则相等。

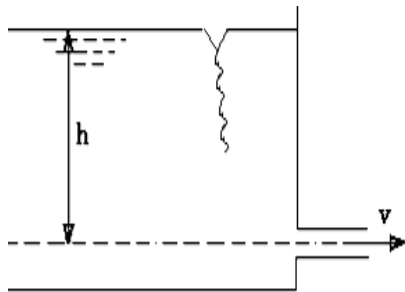
相似原理 · 流动相似: 模型实验需要解决的问题

模型实验需要解决的问题

- ① 根据物理量所组成的相似准则数相等的原则去设计模型，选择流动介质。
- ② 在实验过程中应测定各相似准则数中包含的一切物理量。
- ③ 用数学方法找出相似准则数之间的函数关系，即准则方程式。该方程式便可推广应用到原型及其他相似流动中去。

相似原理 · 例题

例 1: 当通过油池底部的管道向外输油时 (如图所示), 为防止因池内油深太小形成油面的旋涡将空气吸入输油管, 需要通过模型实验确定油面开始出现旋涡的最小油深 $h_{\min}$ 。已知输油管内径 $d = 250 \text{ mm}$, 油的流量 $q_V = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$, 运动黏度 $\nu = 7.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。倘若选取的长度比例尺 $C_l = 1/5$, 为了保证流动相似, 模型输出管的内径、模型内液体的流量和运动黏度应等于多少? 在模型上测得 $h'_{\min} = 50 \text{ mm}$, 油池的最小油深 $h_{\min}$ 应等于多少?

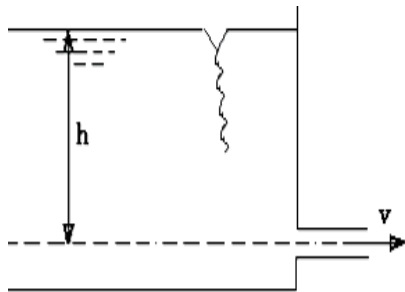


相似原理 · 例题

例 1: 当通过油池底部的管道向外输油时 (如图所示), 为防止因池内油深太小形成油面的旋涡将空气吸入输油管, 需要通过模型实验确定油面开始出现旋涡的最小油深 $h_{\min}$ 。已知输油管内径 $d = 250 \text{ mm}$, 油的流量 $q_V = 0.14 \text{ m}^3/\text{s}$, 运动黏度 $\nu = 7.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ 。倘若选取的长度比例尺 $C_l = 1/5$, 为了保证流动相似, 模型输出管的内径、模型内液体的流量和运动黏度应等于多少? 在模型上测得 $h'_{\min} = 50 \text{ mm}$, 油池的最小油深 $h_{\min}$ 应等于多少?

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = \text{Fr}$$

$$\frac{\rho vl}{\mu} = \frac{vl}{\nu} = \text{Re}$$



相似原理 · 例题

解: 按长度比例尺得模型输出管内径

$$d' = C_l d = \frac{250}{5} = 50 \text{ (mm)}$$

$$\frac{v}{(gl)^{1/2}} = \text{Fr}, \quad \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu} = \text{Re}$$

在重力场中 $g' = g$, 由弗劳德数相等可得模型内液体的流速和流量为

$$v' = \left(\frac{h'}{h}\right)^{1/2} v = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} v$$

$$q' = \frac{\pi}{4} d'^2 v' = \frac{\pi}{4} \left(\frac{d}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} v = \left(\frac{1}{5}\right)^{5/2} q_V = \frac{0.14}{559} = 0.0025 \text{ (m}^3/\text{s)}$$

由雷诺数相等可得模型内液体的运动黏度为

$$\nu' = \frac{v' d'}{v d} \nu = \left(\frac{1}{5}\right)^{3/2} \nu = \frac{7.5 \times 10^{-5}}{11.18} = 6.708 \times 10^{-6} \text{ (m}^2/\text{s)}$$

油池的最小油深为: $h_{\min} = \frac{h'_{\min}}{C_l} = 5 \times 50 = 250 \text{ (mm)}$

相似原理 · 例题

例 2: 密度和动力黏度相等的两种液体从几何相似的喷嘴中喷出。一种液体的表面张力为 0.04409 N/m ，出口流束直径为 7.5 cm ，流速为 12.5 m/s ，在离喷嘴 10 m 处破裂成雾滴；另一液体的表面张力为 0.07348 N/m 。如果二流动相似，另一液体的出口流束直径、流速、破裂成雾滴的距离应多大？

相似原理 · 例题

例 2: 密度和动力黏度相等的两种液体从几何相似的喷嘴中喷出。一种液体的表面张力为 0.04409 N/m ，出口流束直径为 7.5 cm ，流速为 12.5 m/s ，在离喷嘴 10 m 处破裂成雾滴；另一液体的表面张力为 0.07348 N/m 。如果二流动相似，另一液体的出口流束直径、流速、破裂成雾滴的距离应多大？

解: 要保证两流动相似，雷诺数 $\text{Re} = \frac{\rho v l}{\mu}$ 和韦伯数 $\text{We} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma}$ 必须相等，即

$$\frac{\rho' v' l}{\mu'} = \frac{\rho v l}{\mu}, \quad \frac{\rho' v'^2 l'}{\sigma'} = \frac{\rho v^2 l}{\sigma} \quad \text{或} \quad C_p C_1 = 1, \quad C_p^2 C_1 = C_\sigma$$

故
$$C_v = C_\sigma = \frac{0.07348}{0.04409} = 1.667, \quad C_l = 1/C_v = 1/1.667 = 0.6$$

另一流束的出口直径、流速和破裂成雾滴的距离分别为

$$d' = C_l d = 0.6 \times 7.5 = 4.5 \text{ (cm)}$$

$$v' = C_v v = 1.667 \times 12.5 = 20.83 \text{ (m/s)}$$

$$l' = C_l l = 0.6 \times 10 = 6.0 \text{ (m)}$$

相似原理的应用

利用相似原理进行实验研究的步骤：

- ① 选取决定性的相似准则；
- ② 根据决定性相似准则相等的原则设计实验；
- ③ 确定需测的物理量，整理成相似准则；
- ④ 将实验结果换算到实物中去。

异同	量纲分析	相似原理
不同点	不涉及物理意义	无量纲数有物理意义
	不同物理过程的相似	相同物理过程的相似
	量纲运算	重视物理现象
共同点	得到一组无量纲数	

提纲

① 量纲分析

量纲分析基础知识

量纲分析 · 瑞利法

Buckingham π 定理

② 相似原理

几何相似

运动相似

动力相似

流动相似

③ 模拟试验

④ 总结与思考

模型试验 · 全面力学相似模型试验

注意：全面力学相似模型试验**很难办到**！

例：黏性不可压缩流体定常流动

$$Fr = Fr', \quad \frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'} \Rightarrow C_{v2}^2 = C_l C_g \Rightarrow C_{v2} = \sqrt{C_l C_g}$$

$$\Downarrow \quad g = g'$$

$$Re = Re', \quad \frac{vl}{\nu} = \frac{v'l'}{\nu'} \Rightarrow C_{v1} = \frac{C_\nu}{C_l} \quad C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

► 假设选用相同流动介质 $v' = v$ ，于是

$$C_{v1} = C_l^{-1}, \quad C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

若取 $C_l = \frac{l'}{l} = \frac{1}{10}$ 则 $C_{v1} = \frac{v'}{v} = 10$, $C_{v2} = \frac{v'}{v} = \frac{1}{3.16} \Rightarrow$ **不能选用同种介质！**

模型试验 · 全面力学相似模型试验

黏性不可压缩流体定常流动

$$C_{v1} = \frac{C_\nu}{C_l}, \quad C_{v2} = \sqrt{C_l}$$

▶ 假设选用不同黏度的流体 $v' \neq v$

$$C_{v1} = C_{v2} \Rightarrow C_\nu = C_l^{\frac{3}{2}}$$

若取 $C_l = \frac{1}{10}$ 则 $C_\nu = \frac{\nu'}{\nu} = \frac{1}{31.6} \Rightarrow$ 这几乎不可能实现！

原因分析:

- ① 定性的相似准则使得模型中物理量互相牵制
- ② 完全满足相似准则的模型无法实现
- ③ 工程中采用近似模化法

模型试验 · 近似模化法

1、弗劳德模化法

使用范围：重力起主导作用的明渠流动。

$$Fr = Fr', \quad \frac{v^2}{gl} = \frac{v'^2}{g'l'} \quad \xrightarrow{g=g'} \quad C_v = \sqrt{C_l}$$

2、雷诺模化法

使用范围：在黏性力起主导作用而重力不起主导作用的情况下雷诺数是主要相似准则，如管内流、液压、流体机械。

$$Re = Re' \quad \text{即} \quad \frac{vl}{\nu} = \frac{v'l'}{\nu'} \quad \text{或} \quad C_v = \frac{C_\nu}{C_l}$$

3、欧拉模化法

使用范围：流体的自模化区的管内流动，低速风洞实验、气体绕流等。

$$Eu = Eu', \quad \frac{p}{\rho v^2} = \frac{p'}{\rho' v'^2} \quad \Rightarrow \quad C_p = C_v^2 C_p$$

模型试验 · 近似模化法

4、马赫模化法

使用范围：可压缩流体。实物和模型流动的 Ma 数相等。

$$Ma = Ma' \quad \text{或} \quad \frac{v}{a} = \frac{v'}{a'} \quad \text{或} \quad \frac{v}{\sqrt{kRT}} = \frac{v'}{\sqrt{kRT'}} \quad \text{或} \quad C_v = C_a$$

如果模型在风洞中进行，且原型的流体介质是空气，当两种流动的温度保持不变时我们可以假定 $a = a'$ 。

5、斯特劳哈尔模化法

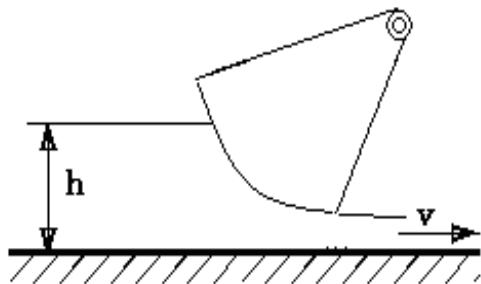
使用范围：流体流经障碍物流场内出现周期性流体运动（涡旋脱落）的情况。

$$Sr = Sr' \quad \text{或} \quad \frac{v}{\omega l} = \frac{v'}{\omega' l'} \quad \text{或} \quad C_v = C_l C_\omega$$

当研究涡街、旋翼、螺旋桨和颤振等时，空气动力现象与周期性运动的频率有关，模型实验时与实物飞行时的斯特劳哈尔数应相等。

模型试验

例3: 图为弧形闸门放水时的情形。已知水深 $h = 6 \text{ m}$ 。模型闸门按长度比例 $C_l = 1/20$ 制作, 实验时的开度与模型相同。试求流动相似时模型闸门前的水深。在模型实验中测得收缩截面的平均流速 $v' = 20 \text{ m/s}$, 流量 $q'_V = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$, 水作用在闸门上的力 $F' = 102 \text{ N}$, 绕闸门轴的力矩 $M' = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。试求在原型上收缩截面的平均流速、流量以及作用在闸门上的力和力矩。



模型试验

例3: 图为弧形闸门放水时的情形。已知水深 $h = 6 \text{ m}$ 。模型闸门按长度比例 $C_l = 1/20$ 制作, 实验时的开度与模型相同。试求流动相似时模型闸门前的水深。在模型实验中测得收缩截面的平均流速 $v' = 20 \text{ m/s}$, 流量 $q'_V = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$, 水作用在闸门上的力 $F' = 102 \text{ N}$, 绕闸门轴的力矩 $M' = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。试求在原型上收缩截面的平均流速、流量以及作用在闸门上的力和力矩。

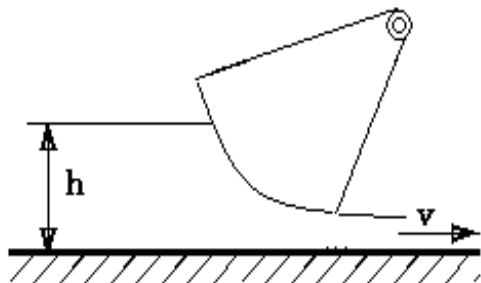
解: 按长度比例尺, 模型闸门前的水深

$$h' = C_l h = 6/20 = 0.3 \text{ (m)}$$

在重力作用下水从闸门下出流, 要使流动相似则弗劳德数 $\text{Fr} = \frac{v}{(gl)^{1/2}}$ 必须相等, 故有

$$C_v = C_l^{1/2}$$

原型待求量可按有关比例尺计算如下:



模型试验

例3: 图为弧形闸门放水时的情形。已知水深 $h = 6 \text{ m}$ 。模型闸门按长度比例 $C_l = 1/20$ 制作, 实验时的开度与模型相同。试求流动相似时模型闸门前的水深。在模型实验中测得收缩截面的平均流速 $v' = 20 \text{ m/s}$, 流量 $q'_V = 3 \times 10^{-2} \text{ m}^3/\text{s}$, 水作用在闸门上的力 $F' = 102 \text{ N}$, 绕闸门轴的力矩 $M' = 120 \text{ N} \cdot \text{m}$ 。试求在原型上收缩截面的平均流速、流量以及作用在闸门上的力和力矩。

解: 收缩截面的平均流速 $v = v'/C_v = v'/C_l^{1/2} = 2.0 \times 20^{1/2} = 8.944 \text{ m/s}$

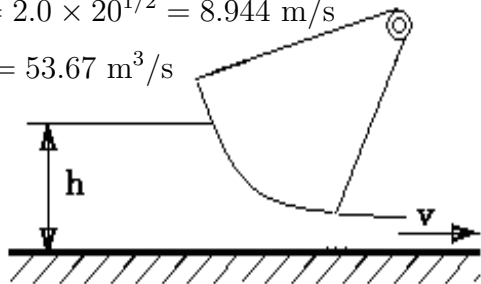
流量 $q_V = q'_V/C_{qV} = q'_V/C_l^{5/2} = 0.03 \times 20^{5/2} = 53.67 \text{ m}^3/\text{s}$

作用在闸门上的力

$$F = F'/C_F = F'/C_l^3 = 102 \times 20^3 = 8.160 \times 10^5 \text{ N}$$

力矩

$$M = M'/C_m = M'/C_l^4 = 120 \times 20^4 = 1.920 \times 10^7 \text{ Nm}$$



提纲

① 量纲分析

量纲分析基础知识

量纲分析 · 瑞利法

Buckingham π 定理

② 相似原理

几何相似

运动相似

动力相似

流动相似

③ 模拟试验

④ 总结与思考

习题作业

5-1、 5-3、 5-5、 5-17、 5-20、 5-30

Thanks!
Welcome Questions