

Engineering Fluid Mechanics

工程流体力学

第6章 不可压缩流体的无黏流动



孙东科

DongkeSun

dksun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院

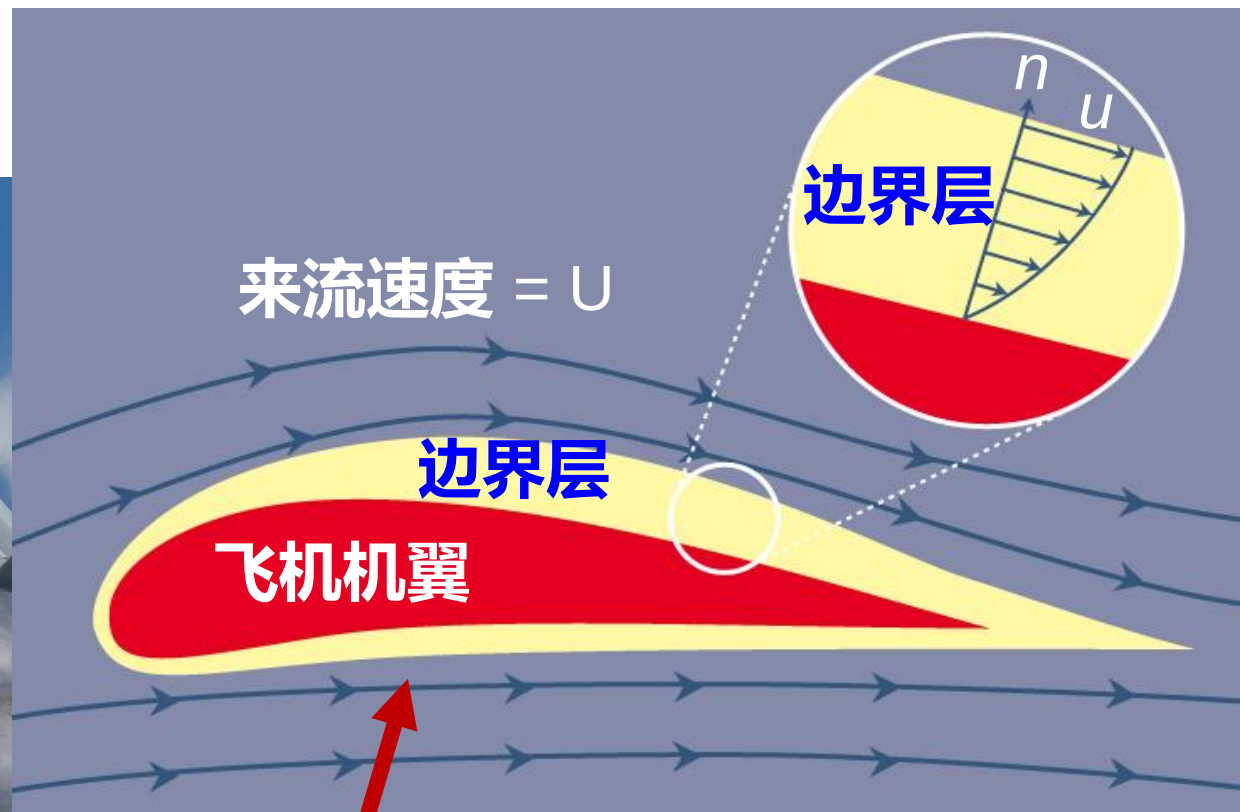
2026/5/27







气流绕过机翼



第6章 不可压缩流体的无黏流动



1. 定常欧拉运动微分方程的积分求解
2. 有旋流动的基本定理
3. 速度势与流函数
4. 基本平面势流
5. 基本平面势流的简单叠加
6. 平行流绕圆柱体的流动

回顾: 描述流体流动的基本方程组 Navier-Stokes Equations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k) = 0,$$

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial u_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_j,$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho u_k \frac{\partial e}{\partial x_k} = -p \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \lambda \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_j} \right),$$

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T).$$

二阶非线性偏微分方程, 难以得到解析解! 简化后, 可以得到解析解吗?

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 兰姆（Lamb）运动微分方程

从理想流体的欧拉运动方程，可以导出兰姆运动方程，而从后者容易看出流动是否有旋。

由理想流体的欧拉运动方程 $\frac{Du}{Dt} = f_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$

将随体导数展开得

$$\begin{aligned}\frac{Du}{Dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \\&= \frac{\partial u}{\partial t} + \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) + w \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\&= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \right) - 2v\omega_z + 2w\omega_y \\&= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) + 2(w\omega_y - v\omega_z)\end{aligned}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 兰姆（Lamb）运动微分方程

将三个方向的加速度作同样处理，代入欧拉运动方程，得兰姆运动方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) = f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) = f_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) = f_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 欧拉运动微分方程可积的条件

尽管欧拉方程或兰姆方程比N-S方程简单，但要进行积分求解还要满足以下条件：

1、定常流动

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

2、质量力有势

$$f_x = -\frac{\partial \pi}{\partial x} \quad f_y = -\frac{\partial \pi}{\partial y} \quad f_z = -\frac{\partial \pi}{\partial z} \quad \text{或} \quad \vec{f} = -\nabla \pi$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) = f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) = f_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) = f_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 欧拉运动微分方程可积的条件

3、正压性流体

即流体的密度只与压强有关

定义压强函数

$$P_F = \int \frac{dp}{\rho}$$

$$\frac{\partial P_F}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \frac{\partial P_F}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad \frac{\partial P_F}{\partial z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) = f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) = f_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) = f_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

关于压强函数

1) 不可压缩流体

$$\rho = \text{const} \quad P_F = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho}$$

2) 完全气体等温流动

$$\rho = \frac{p}{RT} \quad P_F = \int \frac{dp}{\rho} = RT \ln p$$

3) 完全气体绝热流动

$$\rho = C p^{\frac{1}{k}} \quad P_F = \int \frac{dp}{\rho} = \frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

- 欧拉运动微分方程的积分求解

1、无旋流动的欧拉积分

无旋流动时
角速度为零

兰姆方程变为

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) = 0 \end{cases}$$

上式分别乘 dx 、 dy 、 dz 再相加，得全微分式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) = f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) = f_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) = f_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

全微分式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dx \\ & + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dy + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dz = d \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) = 0 \end{aligned}$$

积分后，得

$$\frac{V^2}{2} + \pi + P_F = \text{const} \quad \text{——无旋流动欧拉积分}$$

正压性的理想流体，在有势的质量力作用下，作定常的无旋流动，**在流场中任意位置**，单位质量流体的机械能守恒。

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) = f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) = f_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) = f_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

2、有旋流动的伯努利积分

取一段微元流线，在坐标上的投影为 dx 、 dy 、 dz ，因定常流动流线、迹线重合，有

$$dx = udt \quad dy = vdt \quad dz = wdt$$

将兰姆方程分别乘 dx 、 dy 、 dz ，有

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dx = -2(w\omega_y - v\omega_z) udt \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dy = -2(u\omega_z - w\omega_x) vdt \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dz = -2(v\omega_x - u\omega_y) wdt \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + 2(w\omega_y - v\omega_z) = f_x - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2(u\omega_z - w\omega_x) = f_y - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial t} + 2(v\omega_x - u\omega_y) = f_z - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{cases}$$

6.1 定常欧拉运动微分方程的积分求解

右边项相加，其和为零，可得

$$\frac{V^2}{2} + \pi + P_F = \text{const}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dx = -2(w\omega_y - v\omega_z)u dt \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dy = -2(u\omega_z - w\omega_x)v dt \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V^2}{2} + \pi + P_F \right) dz = -2(v\omega_x - u\omega_y)w dt \end{cases}$$

3、伯努利方程

对不可压缩理想流体在重力场作用下的定常流动

$$\because \pi = gz \quad P_F = \frac{p}{\rho}$$

$$\therefore \frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}$$

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

根据流体微团在流动中是否旋转，可将流体的流动分为两类：**有旋流动和无旋流动**。

有旋流动

流体在流动中，如果流场中有若干处流体微团具有绕通过其自身轴线的旋转运动，则称为有旋流动。

无旋流动

如果在整个流场中各处的流体微团均不绕自身轴线的旋转运动，则称为无旋流动。

数学表达式

$$\text{当} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} = 0 \quad \text{无旋流动}$$

$$\text{当} \quad \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \times \vec{V} \neq 0 \quad \text{有旋流动}$$

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

即当流场速度同时满足： $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ ，流动无旋

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

需要指出的是，有旋流动和无旋流动仅由流体微团本身是否发生旋转来决定，而与流体微团本身的运动轨迹无关。

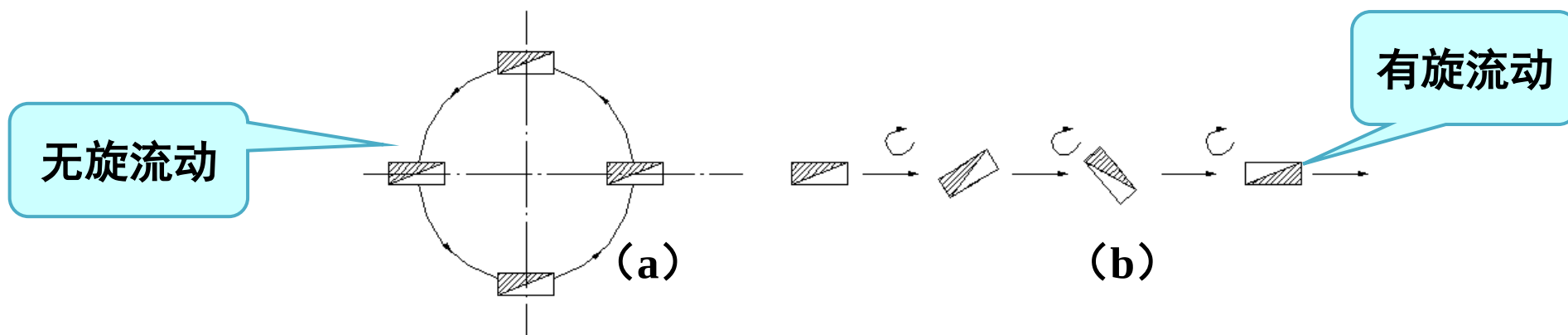


图 (a)：流体微团的运动为旋转的圆周运动，但流体微团自身不旋转，流场为无旋流动；
图 (b)：流体微团尽管在作直线运动，但流体微团在运动时自身旋转，流场为有旋流动。

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 速度环量和旋涡强度

速度环量

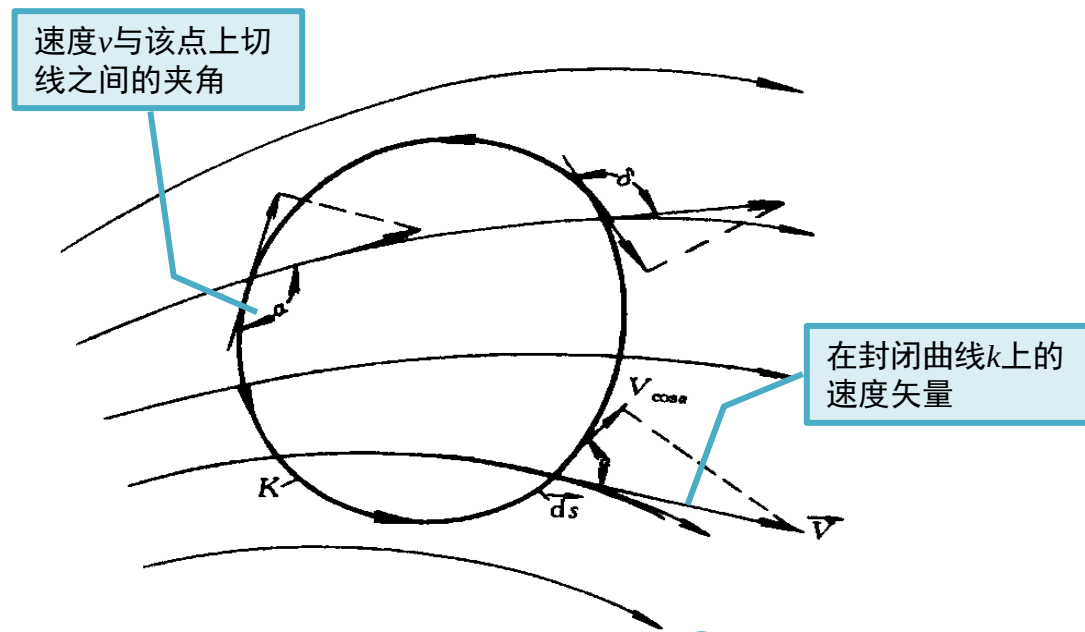
定义：在流场中任取封闭曲线 k 。速度 $\vec{v}$ 沿该封闭曲线的线积分称为速度沿封闭曲线 k 的环量，简称速度环量，用 Γ 表示，即

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_K v \cos \alpha ds$$

$\vec{v}$ —— 在封闭曲线上的速度矢量

α —— 速度与该点上切线之间的夹角

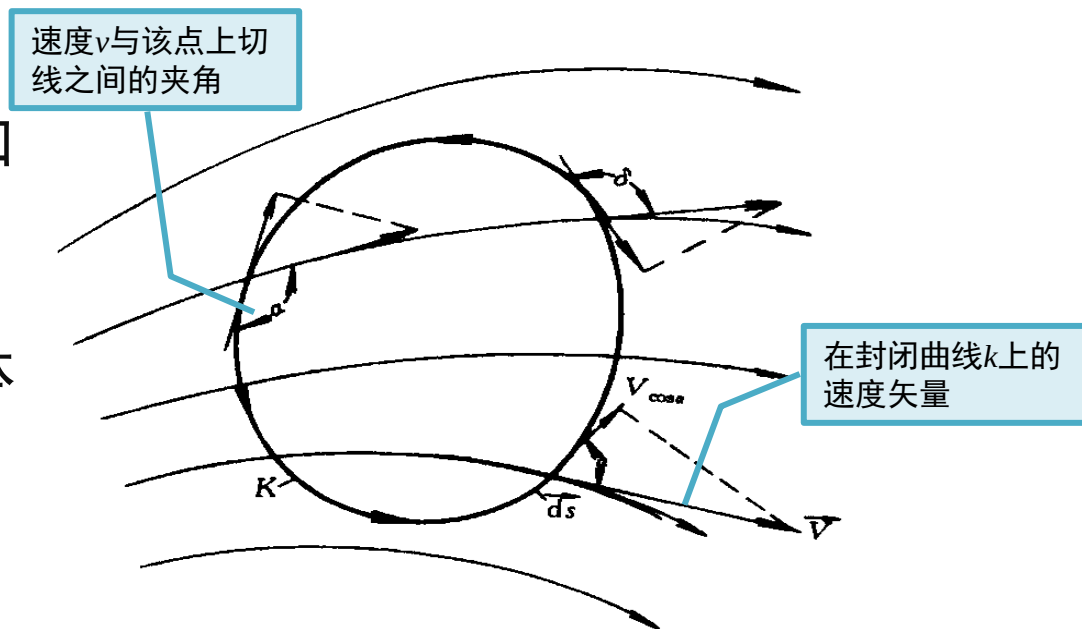
速度环量是个标量，但具有正负号。



6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

速度环量

- 速度环量的正负不仅与速度方向有关，而且与积分时所取的绕行方向有关。
- 通常规定逆时针方向为 K 的正方向，即封闭曲线所包围的面积总在前进方向左侧。
- 当沿顺时针方向绕行时，公式应加一负号。
- 实际上，速度环量所表征的是流体质点沿封闭曲线 K 运动的总的趋势的大小。流体的有旋性。



6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 有旋流动和无旋流动

旋涡强度

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_K v \cos \alpha ds$$

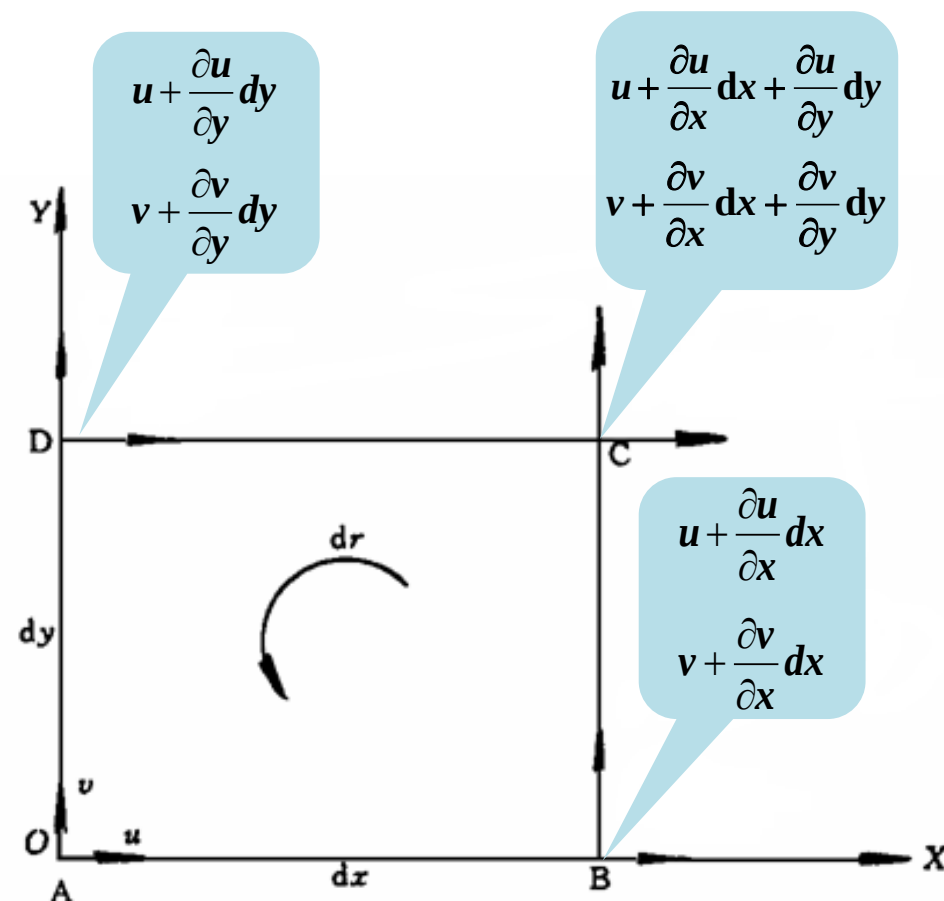
$$\vec{V} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k} \quad d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\vec{V} \cdot d\vec{s} = udx + vdy + wdz$$

$$\Gamma = \oint_K \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint_K (udx + vdy + wdz)$$

沿封闭曲线反时针方向ABCD的速度环量

$$d\Gamma = \frac{u_A + u_B}{2} dx + \frac{v_B + v_C}{2} dy - \frac{u_C + u_D}{2} dx - \frac{v_D + v_A}{2} dy$$



Example: P181 6-1

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 斯托克斯定理

涡旋强度

沿封闭曲线反时针方向
ABCD的速度环量

$$d\Gamma = \frac{u_A + u_B}{2} dx + \frac{v_B + v_C}{2} dy - \frac{u_C + u_D}{2} dx - \frac{v_D + v_A}{2} dy$$

将速度各值代入上式，略去
高于一阶的无穷小各项，再
将旋转角速度公式代入

$$d\Gamma = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dA \quad \xrightarrow{\text{对面积积分}} \quad \Gamma = 2 \iint \omega_z dA$$

斯托克斯定理：速度环量与旋转角速度（涡量）关系

当封闭周线内有涡束时，沿封闭周线的速度环量等于该封闭周线内所有涡束的旋涡强度之和。

旋涡强度 I

$$dI = 2\omega_n dA \quad \xrightarrow{\quad} \quad I = 2 \iint \omega_n dA$$

ω_n — $\vec{\omega}$ 在微元面积 dA 的外法线上的分量

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 斯托克斯定理

涡量 以 Ω 表示之。它定义为单位面积上的速度环量，是一个矢量。

$$\Omega_z = \frac{d\Gamma}{dA} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z$$



$$\Omega_z = \frac{d\Gamma}{dA} = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z$$

$$\left. \begin{aligned} \Omega_x &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\omega_x \\ \Omega_y &= \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\omega_y \\ \Omega_z &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\omega_z \end{aligned} \right\}$$



$$\vec{\Omega} = 2\vec{\omega} = \nabla \times \vec{V}$$

- 在有旋流动中，流体运动速度的旋度称为涡量。
- 在流体流动中，如果涡量的三个分量中有一个不等于零，即为有旋流动。
- 如果在一个流动区域内各处的涡量或它的分量都等于零，也就是沿任何封闭曲线的速度环量都等于零，则在这个区域内的流动一定是无旋流动。

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 汤姆孙定理

1869 年提出的, 称为汤姆孙定理

正压性的理想流体在有势的质量力作用下, 沿任何由流体质点所组成的封闭周线的速度环量不随时间变化。



沿封闭周线的速度环量为

$$\Gamma = \oint_L (u \, dx + v \, dy + w \, dz)$$

速度环量随时间的变化率为

详细证明
见P182-183

$$\begin{aligned} \frac{D\Gamma}{Dt} &= \frac{D}{Dt} \oint_L (u \, dx + v \, dy + w \, dz) \\ &= \oint_L \left[u \frac{D}{Dt} (dx) + v \frac{D}{Dt} (dy) + w \frac{D}{Dt} (dz) \right] + \oint_L \left[\frac{Du}{Dt} dx + \frac{Dv}{Dt} dy + \frac{Dw}{Dt} dz \right] = 0 \end{aligned}$$

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 汤姆孙定理

汤姆孙定理和斯托克斯定理说明：

Conversation

在理想流体中，速度环量和涡旋不能自行产生也不能自行消失。

- ① 本质上是由于理想流体中不存在切向应力，不能传递旋转运动，既不能使不旋转的流体微团产生旋转，也不能使旋转的流体微团停止旋转。
- ② 当汤姆孙定理的条件得不到满足时，流体在运动过程中可能会产生涡旋，真实流体有黏性，涡旋可以产生、消失，汤姆孙定理不再适用。
- ③ 对在有势质量力作用下的正压性理想流体而言，如果从静止开始的流动，由于某种原因产生了涡旋，那么同时必然产生一个环量大小相同方向相反的涡旋，使总环量为零。

6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 亥姆霍兹第一定理

1857年，亥姆霍兹第一定理

同一时刻涡管各截面上的涡旋强度都相等。

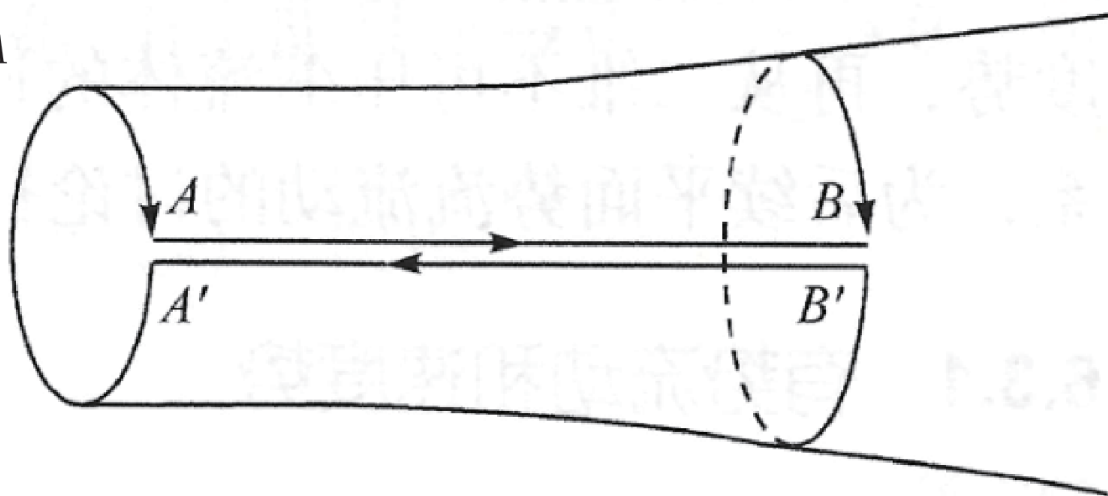


证明：在涡管上任取两个截面 A, B ，在沿管表面取两条无限接近的线 $AB, A'B'$ ，封闭周线 $ABB'A'A$ 包围的涡管表面无涡线通过，所对应的速度环量为零。

$$\begin{aligned}\Gamma_{ABB'A'A} &= \Gamma_{AB} + \Gamma_{BB'} + \Gamma_{B'A'} + \Gamma_{A'A} \\ &= \Gamma_{BB'} + \Gamma_{A'A} = 0\end{aligned}$$

于是

$$\Gamma_{BB'} = \Gamma_{AA'}$$



6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 亥姆霍兹第一定理

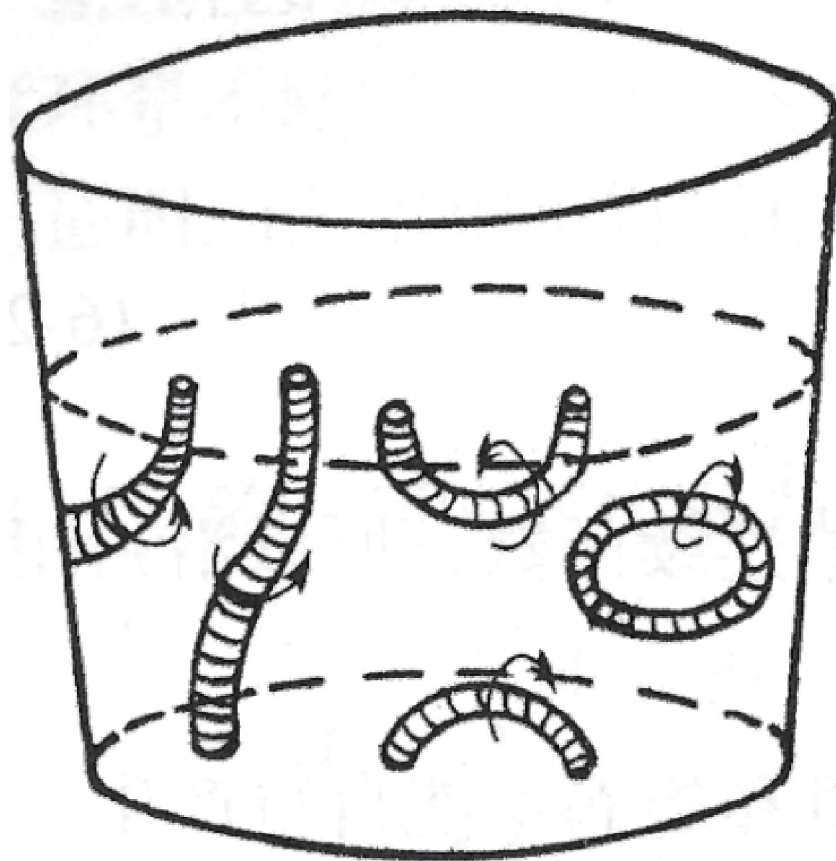
说明:

涡管在流体中既不可能开始, 也不可能终止, 只能是自我封闭的管圈, 或在边界(容器壁面或自由表面)上开始、终止。

- 吸烟人吐出的烟圈
- 大气中的龙卷风开始于云团终止于地面或水面等

右图：涡管在流体中存在的形状

真实流体具有黏性, 由于摩擦消耗能量, 涡管将在运动中逐渐消失.



6.2 有旋流动的基本概念和定理 - 亥姆霍兹第二/三定理

1857年，亥姆霍兹第二定理

正压性理想流体在有势质量力作用下，涡管在运动过程中一直保持为相同流体质点组成的涡管。



1857年，亥姆霍兹第三定理

正压性理想流体在有势质量力作用下，在运动过程中涡管的涡旋强度不随时间变化。



真实流体黏性摩擦消耗能量会使涡旋逐渐减弱，故第三定理只适用于理想流体。

6.3 速度势与流函数 - 有势流动 速度势

有势流动

不可压缩流体或可压缩流体作无旋流动时，总有速度势存在，故无旋流动也称有势流动。

$$\vec{\omega} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$$

上式是 $v_x dx + v_y dy + v_z dz$ 成为某一函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 的全微分的必要且充分的条件，函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 称为速度势函数。

速度势

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = v_x dx + v_y dy + v_z dz$$

势函数 $\varphi(x, y, z, t)$ 的微分方程（以 t 为参数）

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

6.3 速度势与流函数 - 有势流动 速度势

速度势的性质

- ① 速度沿三个坐标轴的分量等于速度势对于相应坐标的偏导数

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

- ② 有势流动中沿一曲线的速度环量等于曲线终点与起点的速度势之差（和路径无关）

$$\Gamma_{AB} = \int_A^B v_x dx + v_y dy + v_z dz = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A$$

- ③ 在有势流动中，速度势函数满足拉普拉斯方程（质量守恒）

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi = 0$$

Example: P185 6—2

6.3 速度势与流函数 - 流函数

流函数存在的条件

不可压缩流体的平面流动

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial v_y}{\partial y}$$

上式是 $v_x dy - v_y dx$ 成为某一函数 $\psi(x, y)$ 的全微分的必要且充分的条件
函数 $\psi(x, y)$ 称为流函数。

流函数

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v_y dx + v_x dy$$

流函数 $\psi(x, y, z, t)$ 的微分方程

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

6.3 速度势与流函数 - 流函数

流函数的性质

① 速度与流函数的关系 $v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \quad v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

② 在平面流动中，两条流线间通过的体积流量等于两条流线上的流函数值之差

$$q_V = \int_A^B v_n dl = \int_A^B [v_x \cos(n, x) + v_y \cos(n, y)] dl = \int_A^B \left[v_x \frac{dy}{dl} + v_y \left(-\frac{dx}{dl} \right) \right] dl = \int_A^B (v_x dy - v_y dx) = \psi_B - \psi_A$$

③ 在平面势流流动中，流函数满足二维拉普拉斯方程

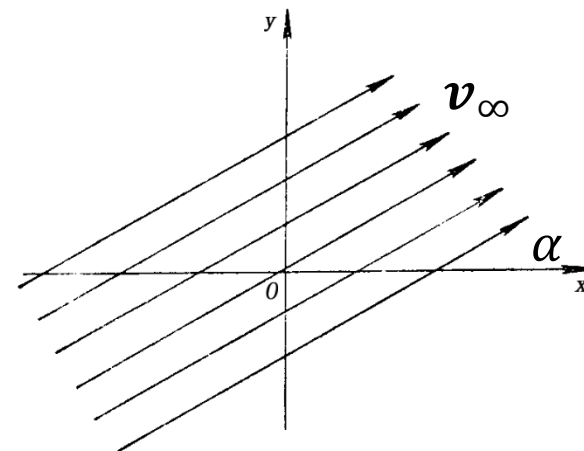
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = 0$$

6.4 基本平面势流

均匀流

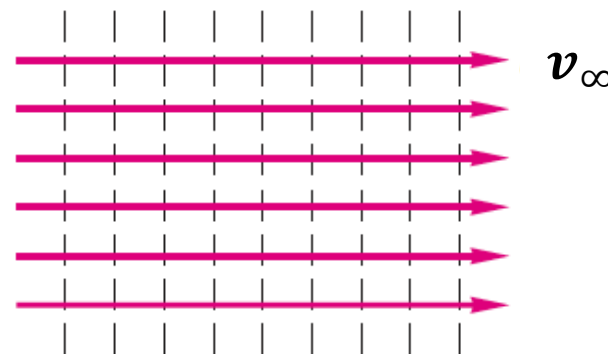
- 流体做等速直线运动，流场中各点速度的大小和方向都相同的流动成为均匀流

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = v_{\infty} \cos \alpha \\ v_y = v_{\infty} \sin \alpha \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = v_{\infty} (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \psi = v_{\infty} (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{array} \right.$$



若等速均匀流平行于x轴

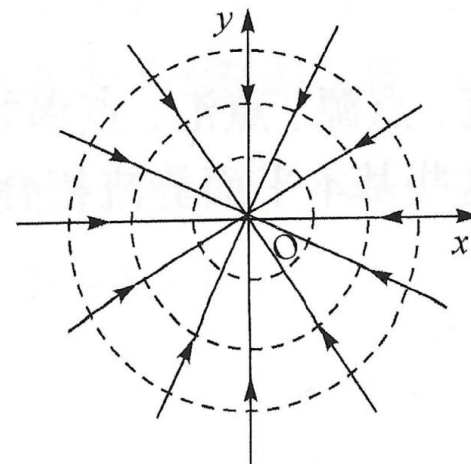
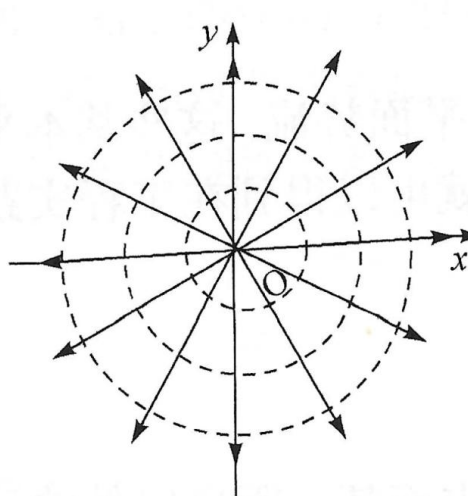
$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \mu_{\infty} \\ v_y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \mu_{\infty} x \\ \psi = \mu_{\infty} y \end{array} \right.$$



6.4 基本平面势流

点源和点汇

- 源可以有正负。
- 正源是从流场上某一点有一定的流量向四面八方流开去的一种流动。
- 负源（又名汇）是一种与正源流向相反的向心流动。



设源点或汇点位于坐标原点，则仅存在径向速度 v_r ，无切向速度 v_θ ，流量为：

$$Q = 2\pi r v_r \quad \rightarrow \quad v_r = \frac{Q}{2\pi r} \quad v_\theta = 0$$

$$\text{势函数} \quad \varphi = \int u_r dr + u_\theta r d\theta = \int \frac{Q}{2\pi r} dr = \frac{Q}{2\pi} \ln r = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\text{流函数} \quad \psi = \int u_r r d\theta - u_\theta dr = \int \frac{Q}{2\pi r} r d\theta = \frac{Q}{2\pi} \theta = \frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$$

6.4 基本平面势流

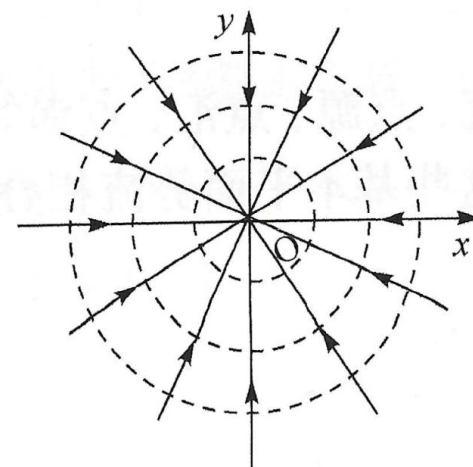
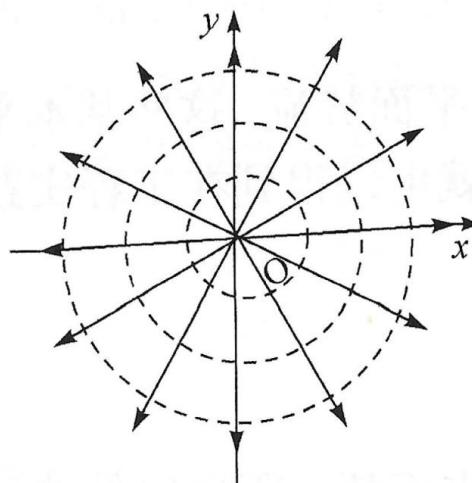
点源和点汇

- 流体从四周沿径向均匀流入一点（汇点）成为点汇，流入汇点的流量：

$$-Q = 2\pi r v_r \quad \rightarrow \quad v_r = \frac{-Q}{2\pi r} \quad v_\theta = 0$$

势函数 $\varphi = -\frac{Q}{2\pi} \ln r = -\frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

流函数 $\psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta = -\frac{Q}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}$



6.4 基本平面势流

点涡

- 流体质点沿着同心圆的轨迹运动，且其速度大小与向径 r 成反比的流动成为点涡。
- 设点涡处位于坐标原点，设点涡的强度为 Γ ，则任一半径 r 处流体的速度可由斯托克斯定理求得：

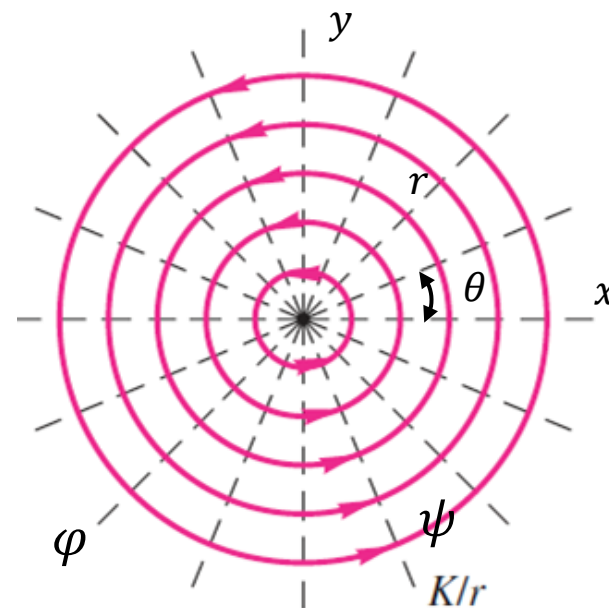
$$v_{\theta} = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$v_r = 0$$

势函数 $\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$

流函数 $\psi = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$

环流是圆周运动，但却不是有旋运动



6.5 基本平面势流的简单叠加

源和汇——偶极流

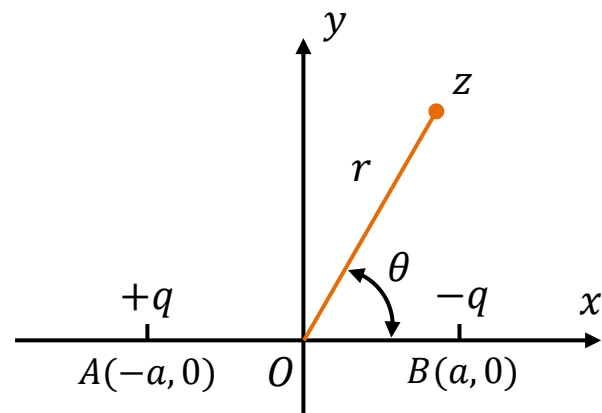
➤ 设源位于A点 $(-a,0)$ ，汇位于B点 $(a,0)$

点汇和点源的复势分别为

$$W_1 = \frac{Q_A}{2\pi} \ln(z + a) \quad W_2 = -\frac{Q_B}{2\pi} \ln(z - a)$$

叠加后
流动复势为

$$W = W_1 + W_2 = \frac{Q_A}{2\pi} \ln(z + a) - \frac{Q_B}{2\pi} \ln(z - a)$$



M 为常数

$$M = \lim_{\substack{2a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} 2aq$$

汇将源中流出的流体全部吸掉而不发生任何流动

当源汇强度一样且无限靠近

$$W = \lim_{\substack{2a \rightarrow 0 \\ q \rightarrow \infty}} \frac{2aq}{2\pi} \left[\frac{\ln(z + a) - \ln(z - a)}{2a} \right] = \frac{M}{2\pi} \frac{d}{dz} \ln z = \frac{M}{2\pi z}$$

$$W = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r e^{i\theta}} = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r} e^{-i\theta} = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r} (\cos\theta - i\sin\theta)$$

6.5 基本平面势流的简单叠加

源和汇——偶极流

- 设源位于A点 $(-a,0)$ ，汇位于B点 $(a,0)$

势函数 $\varphi = \frac{M}{2\pi r} \cos\theta$ 流函数 $\psi = -\frac{M}{2\pi r} \sin\theta$

等势线 $\varphi = \frac{M}{2\pi r} \cos\theta = C = \frac{M}{2\pi r} \frac{x}{r^2} = \frac{M}{2\pi r} \frac{x}{x^2 + y^2}$

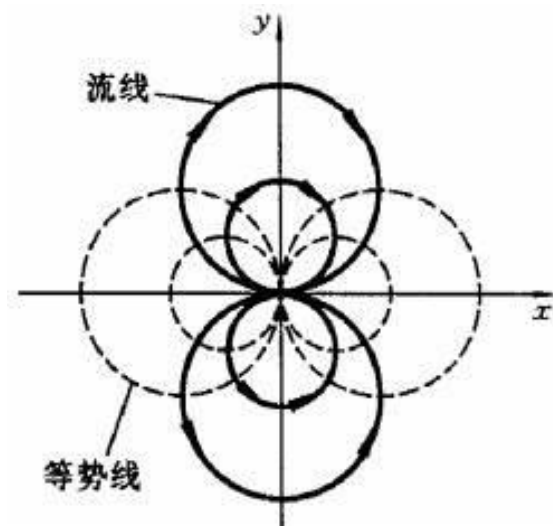
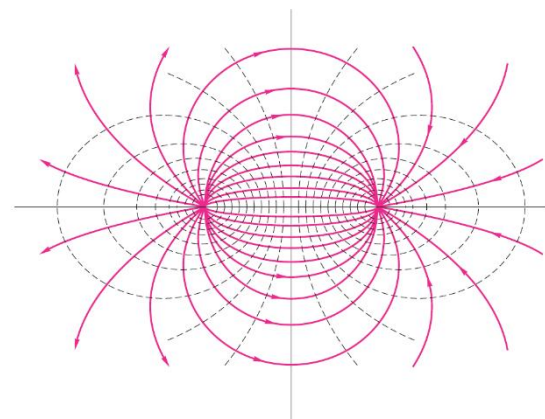
同理得
流线

$$(x - C_1)^2 + y^2 = C_1^2$$

—簇圆心在x轴上与y轴在原点相切的圆

$$x^2 + (y - C_2)^2 = C_2^2$$

—簇圆心在y轴上与x轴在原点相切的圆



6.5 基本平面势流的简单叠加

点汇和点涡——螺旋流

波轮洗衣机



屋顶通风器



旋流除尘器



螺旋桨尾迹



水体中旋涡



6.5 基本平面势流的简单叠加

点汇和点涡——螺旋流

- 流体自外沿圆周切向进入，又从中央不断流出，这样的流动可以近似地看成是点汇和点涡的叠加。例如在旋风燃烧室、离心式喷油嘴和离心式除尘器等设备中。

点汇和点涡的
复势分别为

$$W_1 = -\frac{Q}{2\pi} \ln z$$

$$W_2 = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z$$

叠加后
流动复势为

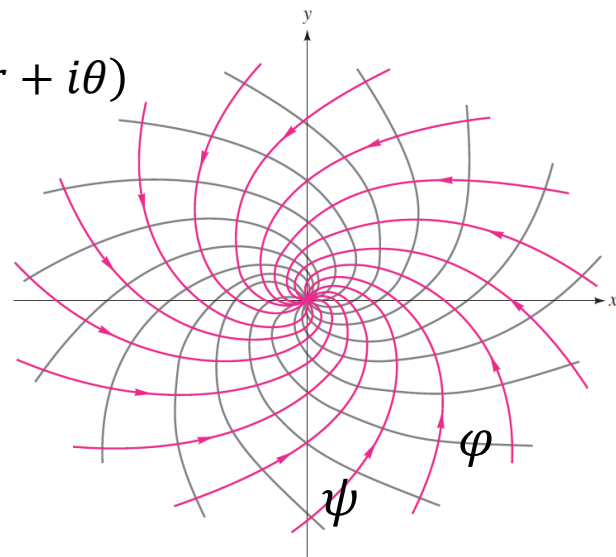
$$W = W_1 + W_2 = -\frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln z = -\frac{Q + i\Gamma}{2\pi} \ln(\ln r + i\theta)$$

势函数

$$\varphi = -\frac{1}{2\pi} (Q \ln r - i\Gamma \theta)$$

流函数

$$\psi = -\frac{1}{2\pi} (Q\theta + \Gamma \ln r)$$



6.5 基本平面势流的简单叠加

例：一个强度为 $Q = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$ 的点源和一个强度为 $\Gamma = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ 的点涡叠加于坐标原点，求速度势和流函数表达式，以及在坐标 $(1 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$ 处的速度。

解：

6.5 基本平面势流的简单叠加

例：一个强度为 $Q = 0.2 \text{ m}^2/\text{s}$ 的点源和一个强度为 $\Gamma = 1.0 \text{ m}^2/\text{s}$ 的点涡叠加于坐标原点，求速度势和流函数表达式，以及在坐标 $(1 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$ 处的速度。

解：

点源的速度势和流函数 $\varphi = \frac{0.2}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{0.2}{2\pi} \theta$

点涡的速度势和流函数 $\varphi = \frac{1}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{1}{2\pi} \ln r$

叠加后所得螺旋流的速度势和流函数 $\varphi = \frac{1}{2\pi} (0.2 \ln r + \theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (0.2\theta - \ln r)$

点 $(1 \text{ m}, 0.5 \text{ m})$ 处的径向速度和切向速度

$$v_r = \frac{Q_\gamma}{2\pi r} = \frac{0.2}{2\pi \sqrt{1^2 + 0.5^2}} = 0.0285 \text{ (m/s)}, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1^2 + 0.5^2}} = 0.142 \text{ (m/s)}$$

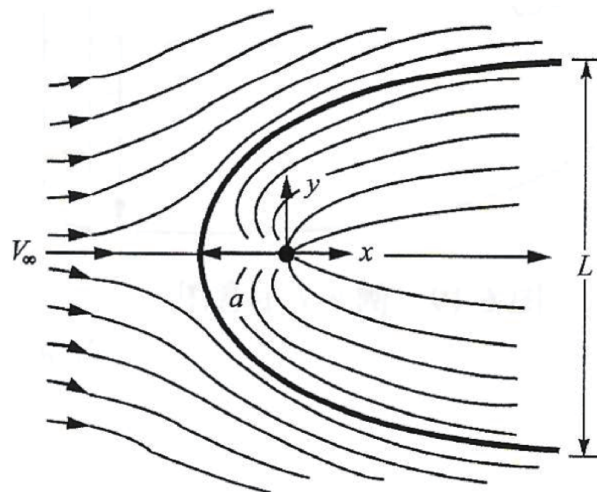
6.5 基本平面势流的简单叠加

沿 x 轴的平行流叠加一个位于坐标原点的点源, 形成兰金 (Rankine) 半体流。
兰金半体流的流函数

$$\begin{aligned}\psi &= V_{\infty}y + \frac{Q_{\psi}}{2\pi}\theta = V_{\infty}r \sin \theta + \frac{Q_{\psi}}{2\pi}\theta \\ &= V_{\infty}y + \frac{Q_{\psi}}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

流速

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_{\infty} + \frac{Q_{\psi}}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q_{\psi}}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$



在 x 轴上的驻点 $y = 0, x = -\frac{Q_{\psi}}{2\pi V_{\infty}} = -a$ 或 $\theta = \pi$, 此时 $\psi = \frac{Q_{\psi}}{2}$

解过驻点的流线代表兰金半体表面, 有 $V_{\infty}r \sin \theta + \frac{Q_{\psi}}{2\pi}\theta = \frac{Q_{\psi}}{2}$

6.5 基本平面势流的简单叠加

沿 x 轴的平行流叠加一个位于坐标原点的点源, 形成兰金 (Rankine) 半体流。
兰金半体流的流函数

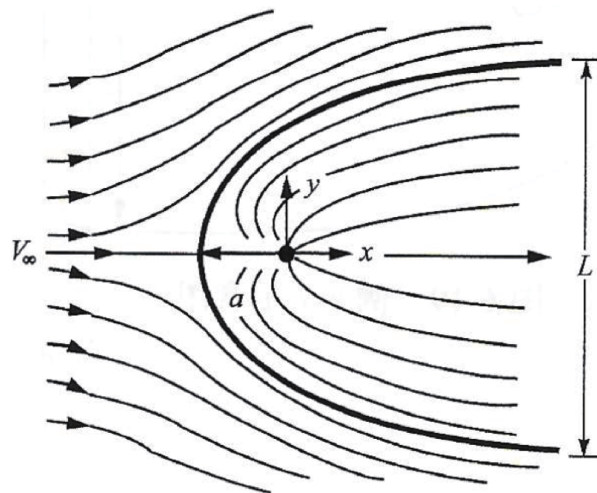
$$\begin{aligned}\psi &= V_{\infty}y + \frac{Q_{\psi}}{2\pi}\theta = V_{\infty}r \sin \theta + \frac{Q_{\psi}}{2\pi}\theta \\ &= V_{\infty}y + \frac{Q_{\psi}}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

流速

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = V_{\infty} + \frac{Q_{\psi}}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{Q_{\psi}}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

故兰金半体表面方程为 $r = \frac{Q_{\psi}}{2\pi V_{\infty}} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}$

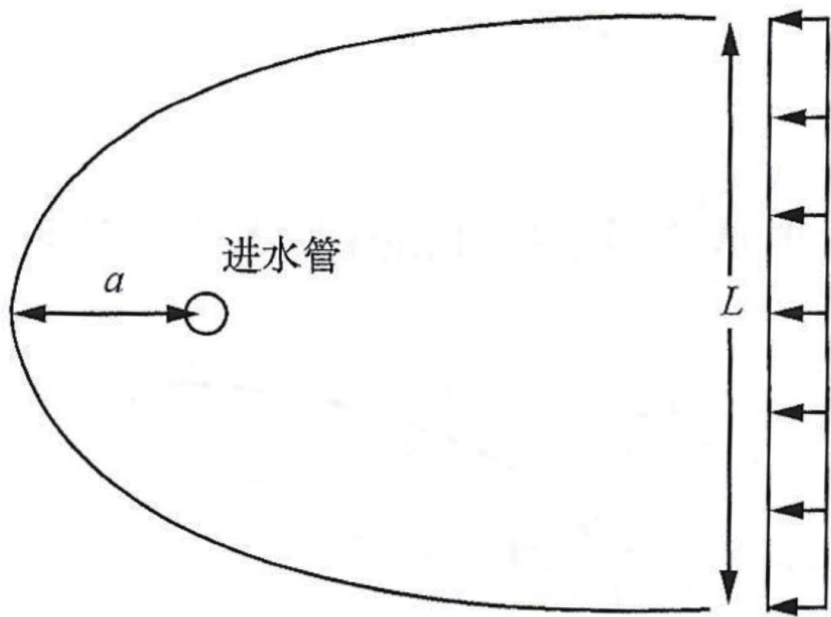
当 $x \rightarrow +\infty, \theta \rightarrow 0$, 可得兰金半体的厚度 $L = 2r \sin \theta \rightarrow \frac{Q_{\psi}}{V_{\infty}}$



6.5 基本平面势流的简单叠加

例：某发电厂从海中抽取海水用于冷却，收集海水装置设计成兰金半体形状，海水从进水管吸入，俯视图如图所示，水面以下装置总高度 5 m，海中水速 0.2 m/s ，流量 $15 \text{ m}^3/\text{s}$ ，求进水管与左侧壳体的距离 a ，以及装置进水宽度 L 。

解：由题意知，这是一个点汇与一个平行流叠加，与前面所述兰金半体流相似。



6.5 基本平面势流的简单叠加

例：某发电厂从海中抽取海水用于冷却，收集海水装置设计成兰金半体形状，海水从进水管吸入，俯视图如图 所示，水面以下装置总高度 5 m，海中流速 0.2 m/s,流量 15 m³/s, 求进水管与左侧壳体的距离 a ，以及装置进水宽度 L 。

解：由题意知，这是一个点汇与一个平行流叠加，与前面所述兰金半体流相似。

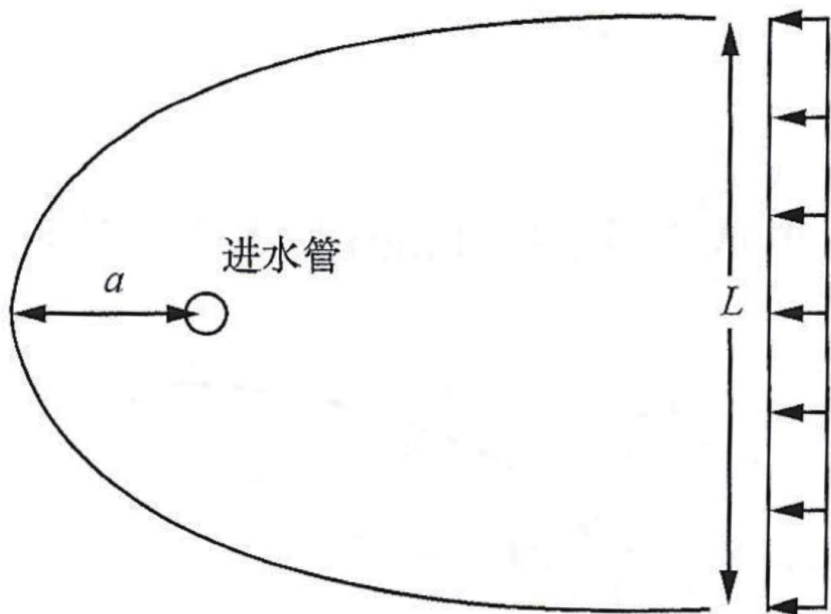
不同是流速方向正好与前述兰金半体流相反。

先求点汇的强度

$$Q = \frac{15}{5} = 3 \text{ m}^2/\text{s}$$

进水管与左侧壳体的距离 $a = \frac{Q_\gamma}{2\pi V_\infty} = 2.39 \text{ m}$

装置进水宽度 $L = \frac{Q_\gamma}{V_\infty} = 15 \text{ m}$

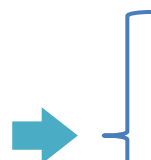


6.6 平行流绕圆柱体的流动

圆柱体无环量绕流

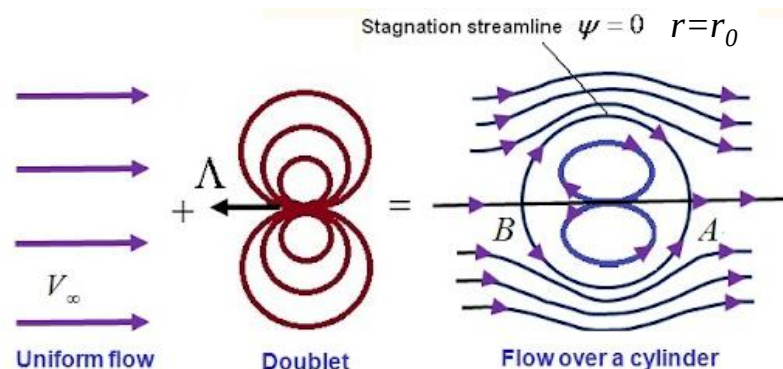
速度分布

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_{\infty} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_{\infty} \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) \sin \theta \end{cases}$$



$$\begin{cases} \text{当 } r \rightarrow \infty \text{ 时} & v_r = v_{\infty} \cos \theta, v_{\theta} = -v_{\infty} \sin \theta \\ \text{当 } r = r_0 \text{ 时} & v_r = 0, v_{\theta} = -2v_{\infty} \sin \theta \end{cases}$$

无穷远处
为均匀流
圆柱面只
有切速度



压强分布

由伯努利方程计算

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{p_{\infty}}{\rho} + \frac{v_{\infty}^2}{2}$$



$$p = p_{\infty} + \frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 (1 - 4 \sin^2 \theta)$$

代入圆柱表面速度

压强系数

$$C_p = \frac{p - p_{\infty}}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta$$

圆柱面量纲一的压强系数与半径、无穷远处速度和压强均无关

6.6 平行流绕圆柱体的流动

圆柱体有环量绕流

- 让圆柱体以等角速度 ω 绕起轴心顺时针旋转，成为均匀流、偶极子流和点涡叠加。

叠加复势为
$$W = W_1 + W_2 + W_3 = v_\infty z + \frac{M}{2\pi z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z \quad M = 2\pi v_\infty r_0^2$$

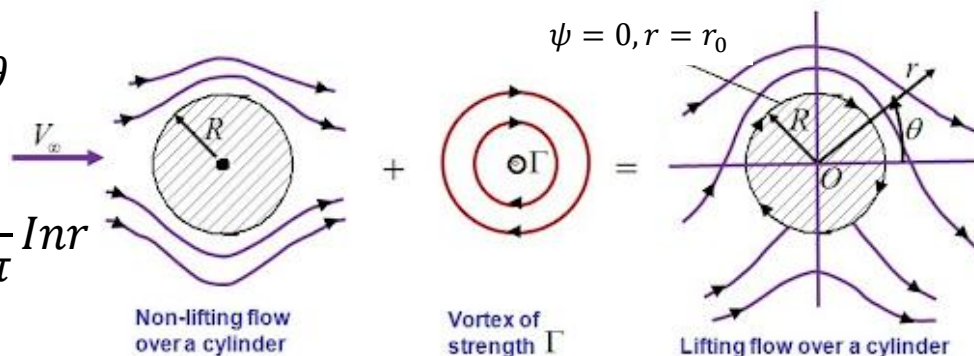
势函数
$$\varphi = v_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

流函数
$$\psi = v_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$

速度分布 $P(r, \theta)$

$$v_r = v_\infty \left(1 + \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \cos \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \theta$$

$$v_\theta = -v_\infty \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) r \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$$



6.6 平行流绕圆柱体的流动

圆柱体有环量绕流

当 $r=r_0$ 时

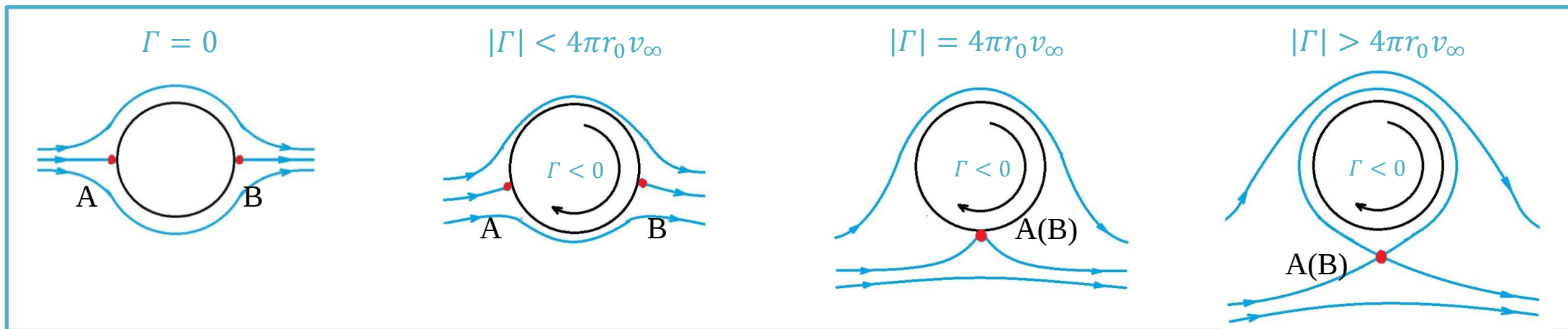
$$v_r = 0$$

$$v_\theta = -2v_\infty \sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$$

驻点的位置

$$\text{令 } v_\theta = 0$$

$$\sin\theta = -\frac{\Gamma}{4\pi r_0 v_\infty}$$



压强分布

$$p = p_\infty + \frac{1}{2}\rho \left[v_\infty^2 - (-2v_\infty \sin\theta) + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right]$$

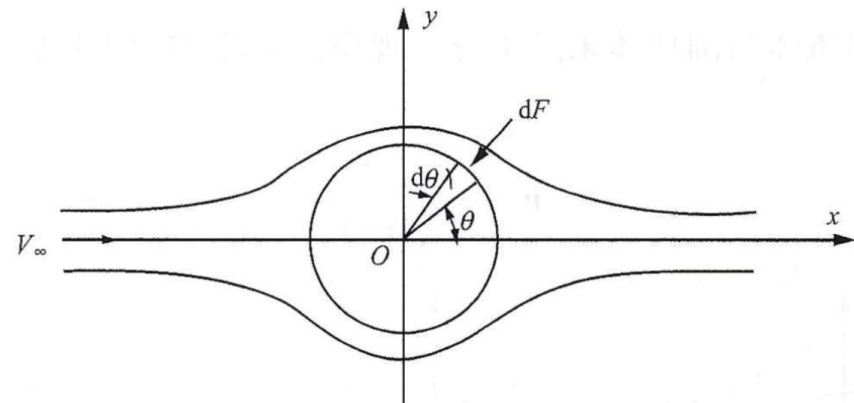
代入圆柱表面速度

6.6 平行流绕圆柱体的流动

库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 公式

考虑单位长圆柱体所受的阻力和升力 (如图所示):

$$\begin{aligned} F_D &= F_x \\ &= - \int_0^{2\pi} p r_0 \cos \theta d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left[V_\infty^2 - \left(2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \right] \right\} r_0 \cos \theta d\theta \\ &= -r_0 \left(p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} \right) \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta + \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &\quad + 2r_0 \rho V_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos \theta d\theta = 0 \end{aligned}$$



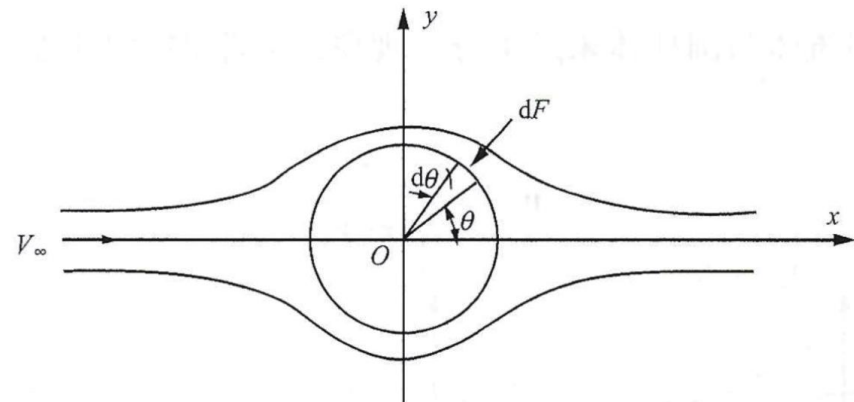
上式说明, 当理想流体的均匀流绕流圆柱体时, 即使存在环量流体作用于圆柱体的力在来流方向的分量也等于零。

6.6 平行流绕圆柱体的流动

库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 公式

对于升力, 有

$$\begin{aligned} F_L &= F_y \\ &= - \int_0^{2\pi} p r_0 \sin \theta d\theta \\ &= - \int_0^{2\pi} \left\{ p_\infty + \frac{1}{2} \rho \left[V_\infty^2 - \left(2V_\infty \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \right)^2 \right] \right\} r_0 \sin \theta d\theta \\ &= -r_0 \left(p_\infty + \frac{1}{2} \rho V_\infty^2 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r_0^2} \right) \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta + \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \\ &\quad + 2r_0 \rho V_\infty^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = \frac{\rho V_\infty \Gamma}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{2\pi} = \rho V_\infty \Gamma \end{aligned}$$



上式被称为库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 升力公式, 由库塔和茹科夫斯基分别于 1902 年和 1906 年独立提出。

6.6 平行流绕圆柱体的流动 库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 公式

由库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 公式可知,

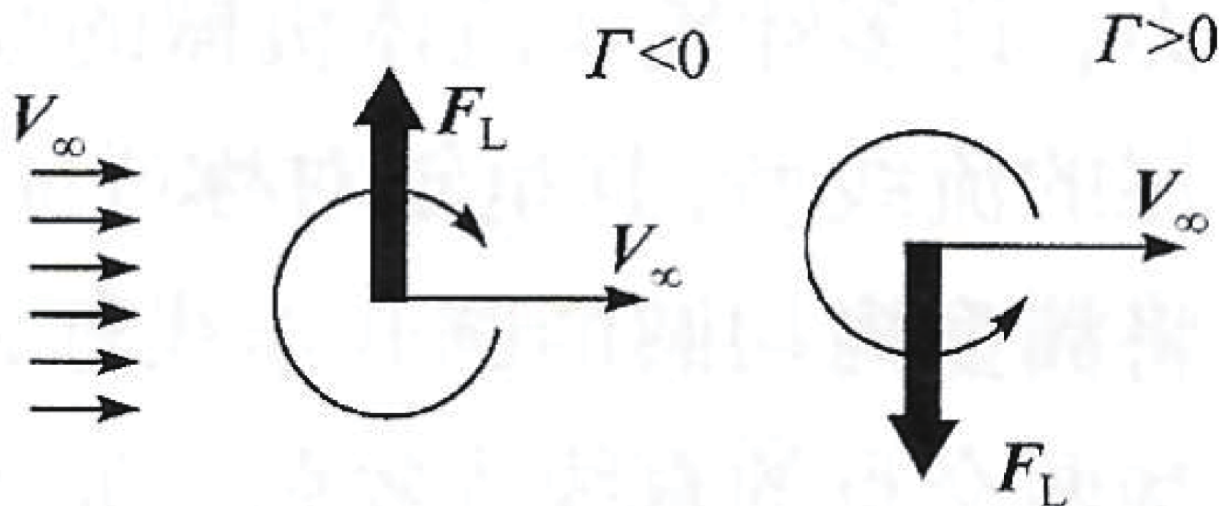
- 理想流体平行流绕圆柱体有环量流动时, 阻力仍为零、升力不为零。
- 升力大小等于流体密度、平行流速度和速度环量三者的乘积。
- 升力方向由来流速度矢量 V_∞ 逆环流方向 Γ 旋转 90° 确定, 如图所示。

① 如 $\Gamma < 0$, 则在环流平面内, 从来流速度矢量 V_∞ 开始, 逆时针转动 90° 得升力方向。

② 如 $\Gamma > 0$, 则在环流平面内, 从来流速度矢量 V_∞ 开始, 顺时针转动 90° 得升力方向。

写成矢量公式可表示成

$$F_L = \rho V_\infty \times \Gamma。$$

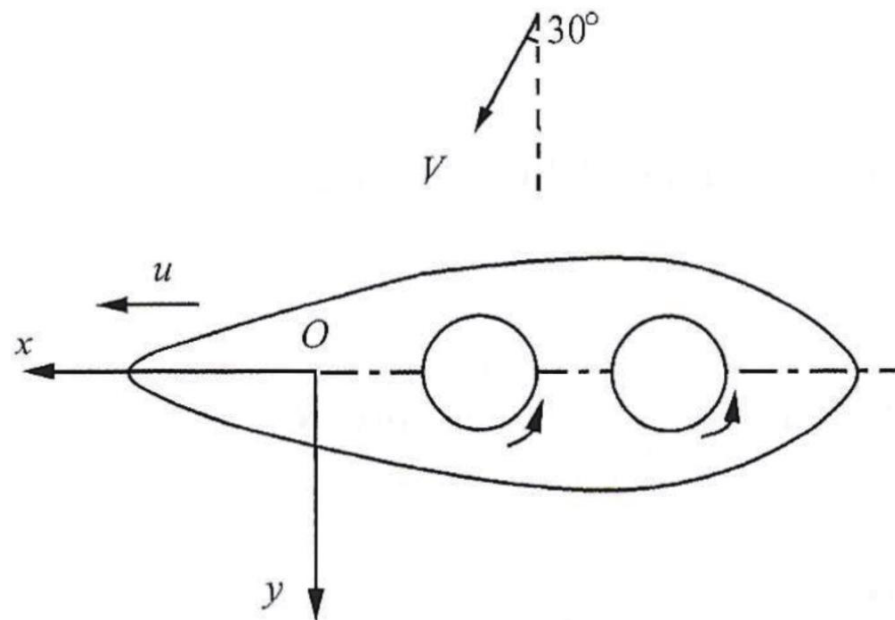


6.6 平行流绕圆柱体的流动

库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 公式

例：船在静水中以 $u = 1.11 \text{ m/s}$ 的速度前进，风速为 $V = 8.33 \text{ m/s}$ ，方向如图所示。船上装有两个直径 $d = 2 \text{ m}$ ，高 $L = 15 \text{ m}$ 的圆柱体，以 $\omega = 750 \text{ r/min}$ 作逆时针转动。空气密度为 $\rho = 1.209 \text{ kg/m}^3$ ，求船在 x 方向所受到的推进力 F 。

解：



6.6 平行流绕圆柱体的流动

库塔-茹科夫斯基 (Kutta-Joukowski) 公式

例：船在静水中以 $u = 1.11 \text{ m/s}$ 的速度前进，风速为 $V = 8.33 \text{ m/s}$ ，方向如图所示。船上装有两个直径 $d = 2 \text{ m}$ ，高 $L = 15 \text{ m}$ 的圆柱体，以 $\omega = 750 \text{ r/min}$ 作逆时针转动。空气密度为 $\rho = 1.209 \text{ kg/m}^3$ ，求船在 x 方向所受到的推进力 F 。

解：把坐标系固定在船上，则船受到的风速

在 x 方向分量 $V_x = 8.33 \sin 30^\circ - 1.11 = 3.06 \text{ (m/s)}$

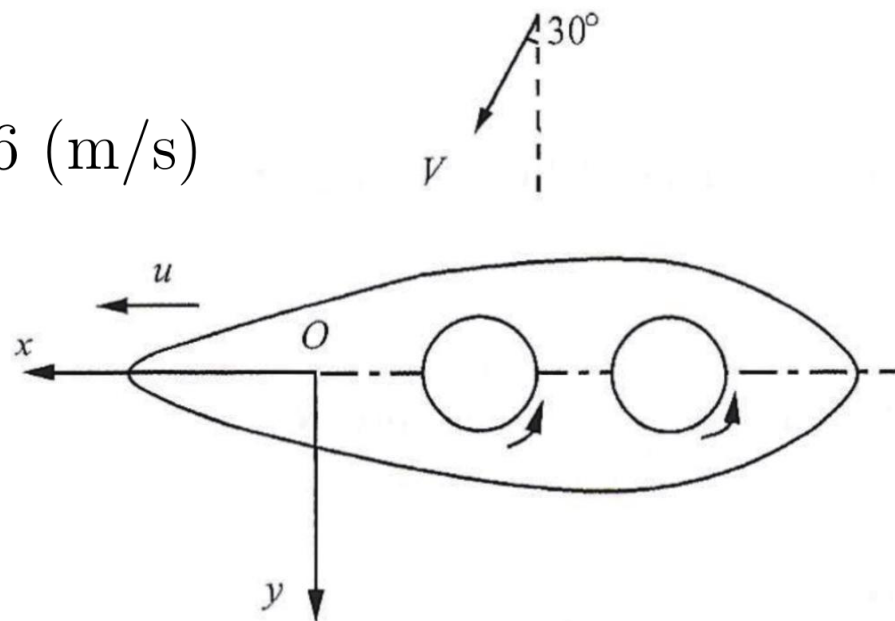
在 y 方向分量 $V_y = 8.33 \cos 30^\circ = 7.21 \text{ (m/s)}$

风速在圆柱体表面产生的速度环量

$$\Gamma = 2\pi \frac{\omega}{60} \frac{d}{2} \cdot \pi d = 493 \text{ m}^2/\text{s}$$

两个圆柱体在 x 方向受到的总升力 $F_x = 2L\rho V_y \Gamma = 129 \text{ kN}$

两个圆柱体受到气流在 x 方向的总升力也就是船受到的推进力。



Thanks!

感谢关注 敬请指导

孙东科

www.MesoLab.net

电邮: dksun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院

SEU