



流体力学 · 普朗特边界层理论

孙东科

dksun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院

2026年5月27日



目录 CONTENTS

1. 边界层概念
2. 绕平板流动边界层的近似计算
3. 绕曲面流动及边界层的分离
4. 黏性流体绕小圆球的蠕流流动
5. 黏性流体绕流物体的阻力

什么是不可压缩流体的外部流动？

“南昌号” 驱逐舰



“南海二号” 钻井平台



海水围绕军舰、潜艇、航母流动，海水围绕海岛、钻井平台流动.....

空气围绕飞机、飞艇、气球、风筝、小鸟、树木、高楼大厦流动.....

20世纪初及在此之前，流体力学的研究分为两个分支：

- 一是研究流体运动时**不考虑黏性**，运用数学工具分析流体的运动规律。
- 另一个是不用数学理论而完全建立在**实验基础上对流体运动进行研究**，解决了技术发展中许多重要问题，但其结果常受实验条件限制。

这两个分支的研究方法完全不同，这种**理论和实验分离**的现象持续了150多年。

20世纪初普朗特提出了**边界层理论**

1904年，德国著名的力学家**普朗特**在海德尔堡第三届国际数学家学会上宣读的论文《关于摩擦极小的流体运动》中首先提出的。

由于边界层理论具有广泛的理论和实用意义，因此得到了迅速发展并成为黏性流体力学的一个重要领域。

1. 边界层的概念 - 什么是边界层?

第三届国际数学大会

德国海登堡

德国著名的力学家 - 普朗特

《论黏性很小的流体运动》

或译为《关于摩擦极小的流体运动》

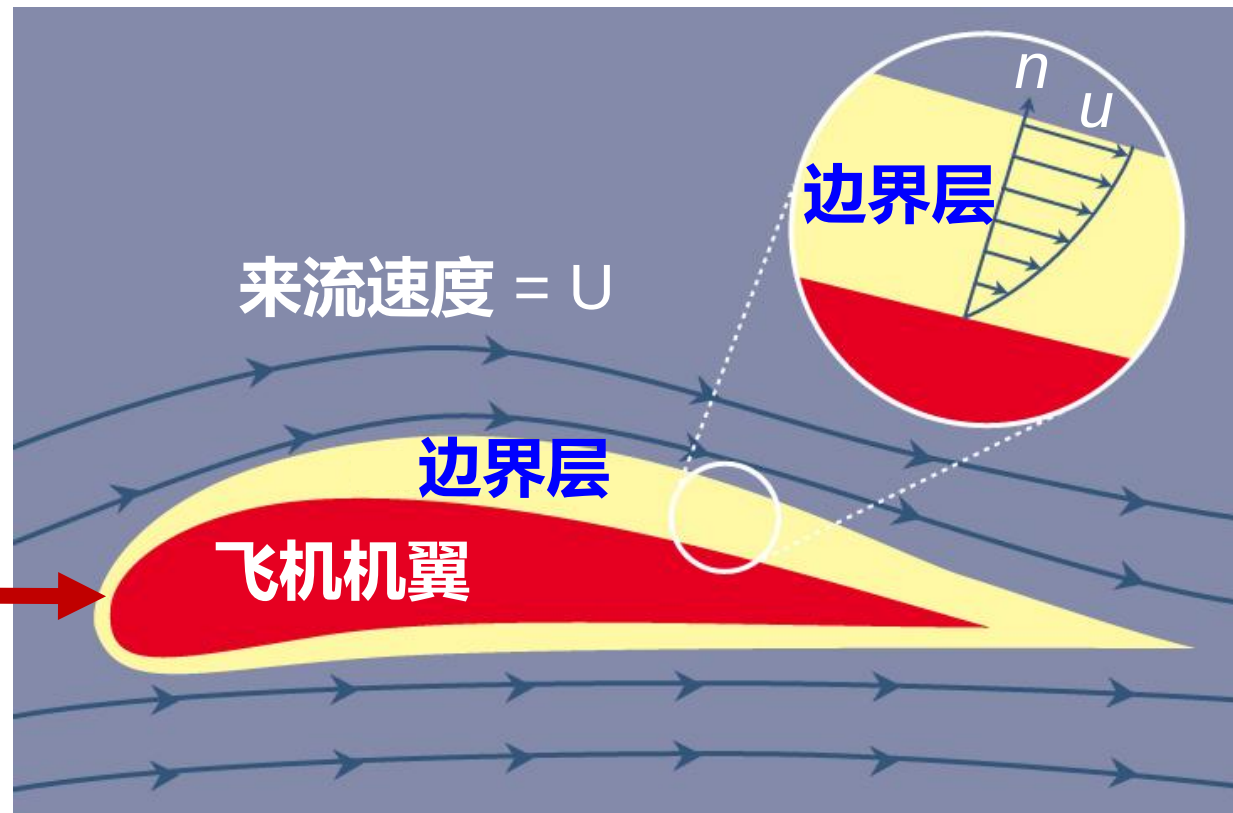


Ludwig Prandtl (1875-1953)

水和空气等黏度很小的流体，在大雷诺数下绕物体流动时，黏性对流动的影响仅限于紧贴物体壁面的薄层中，而在这一薄层外黏性影响很小，完全可以忽略不计，这一薄层称为边界层。

1. 边界层的概念 - 什么是边界层?

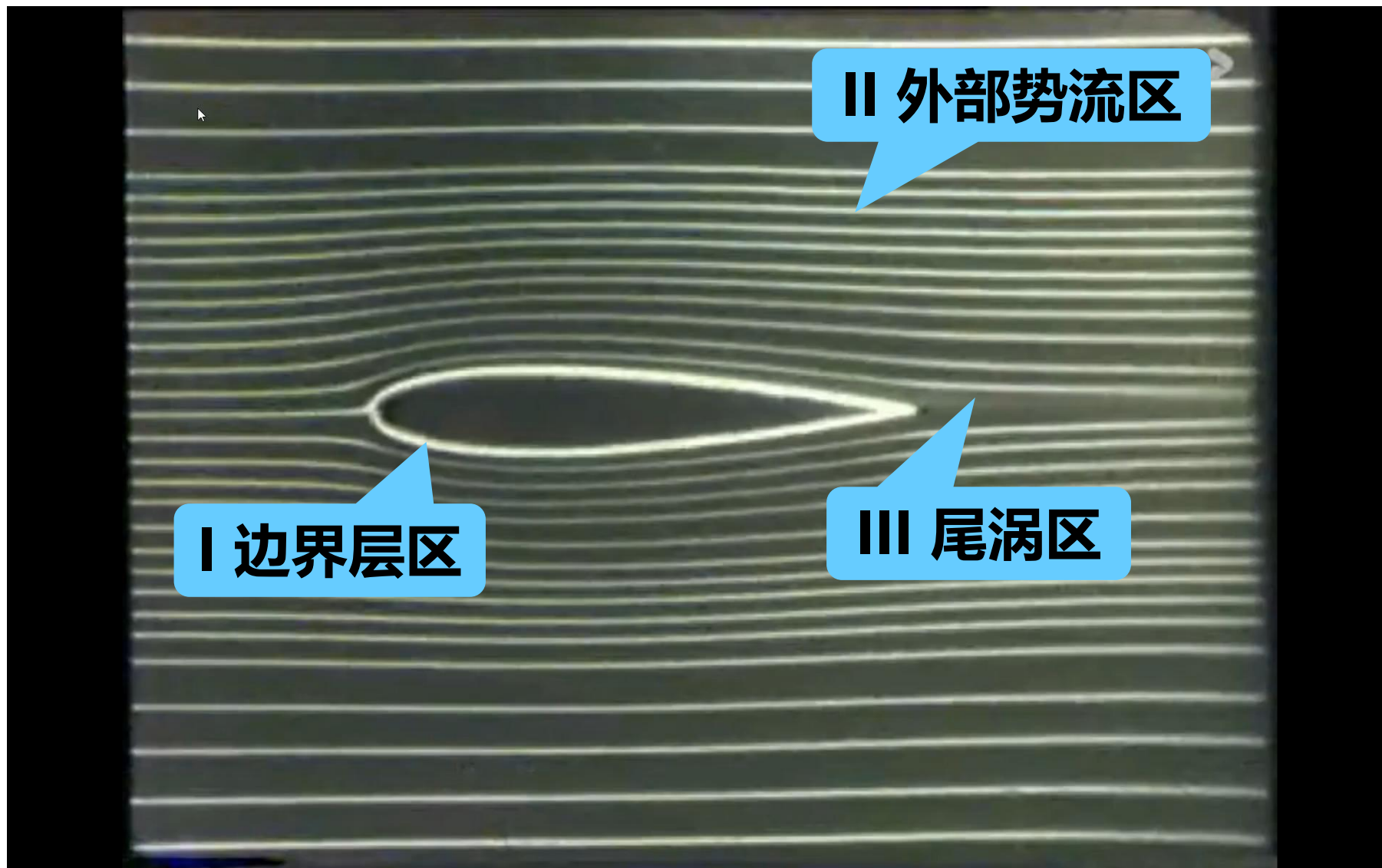
气流绕过机翼形成的边界层



边界层内、外区域并没有明显的分界面，一般将壁面流速为零与流速达到来流速度99%处之间的距离定义为**边界层厚度**。

1. 边界层的概念 - 黏性流体外部流动的流场划分

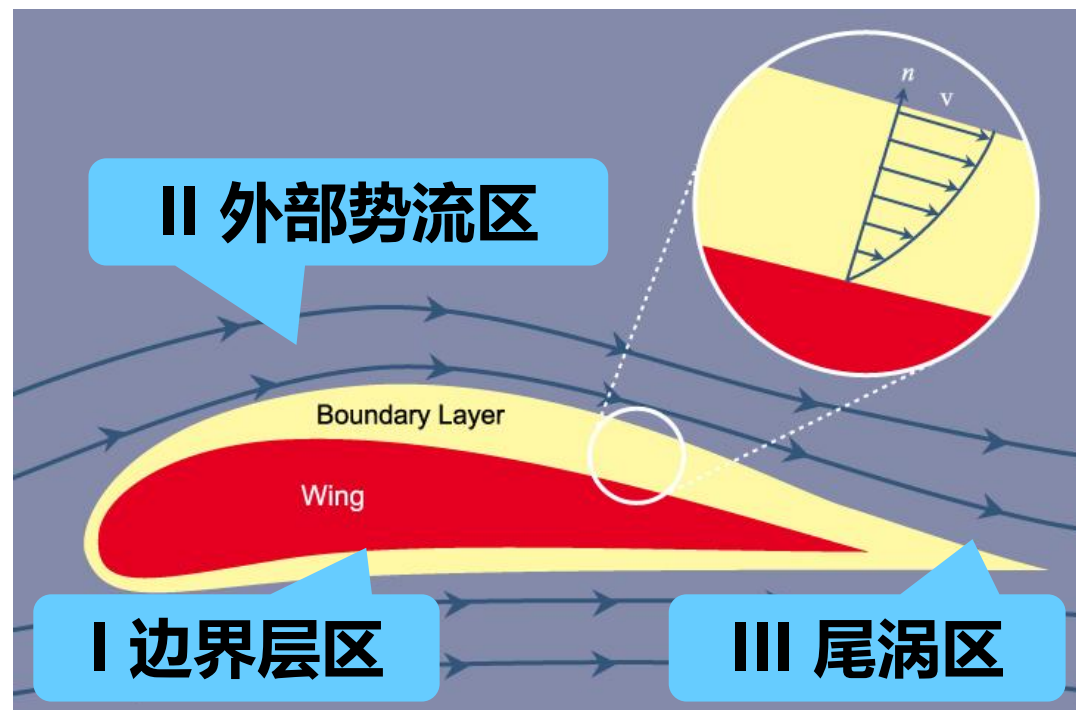
大雷诺数下均匀绕流物体表面的流场划分为三个区域:



1. 边界层的概念 - 黏性流体外部流动的流场划分

流场的求解可分为两个区进行

- 在边界层和尾涡区内，黏性力作用显著，黏性力和惯性力有相同的数量级，属于**黏性流体的有旋流动区**；

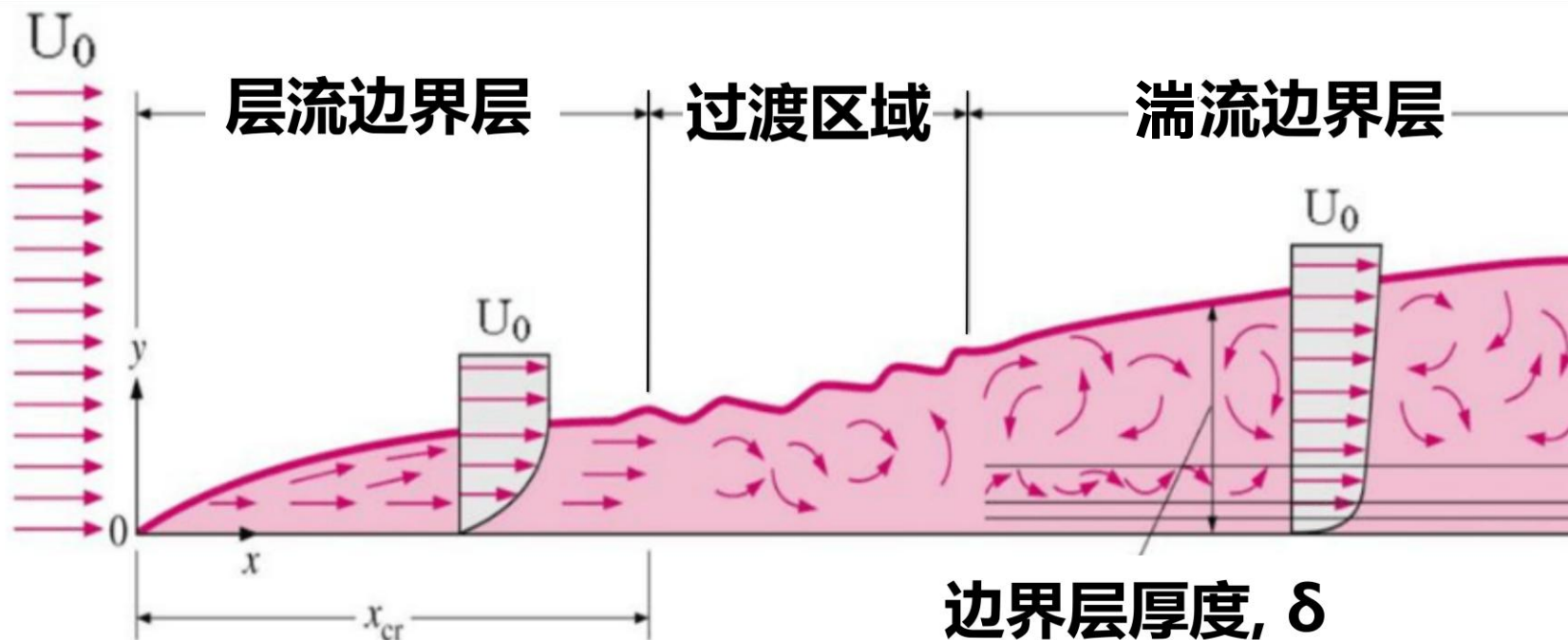


- 在边界层和尾涡区外，流体的运动速度几乎相同，速度梯度很小，边界层外部的流动不受固体壁面的影响，即使黏度较大的流体，黏性力也很小，主要是惯性力。所以可将这个区域看作是**理想流体势流区**，可以利用**理想流体伯努里方程**来研究流场的速度分布。

普朗特边界层理论开辟了用理想流体理论和黏性流体理论联合研究的一条新途径。

1. 边界层的概念 - 层流边界层与紊流边界层

按流体流动的状态，可将流体流动分为**层流**和**湍流（紊流）**。



判别边界层层流、湍流的准则数:

$$Re_x = \frac{V_\infty}{\nu} x$$

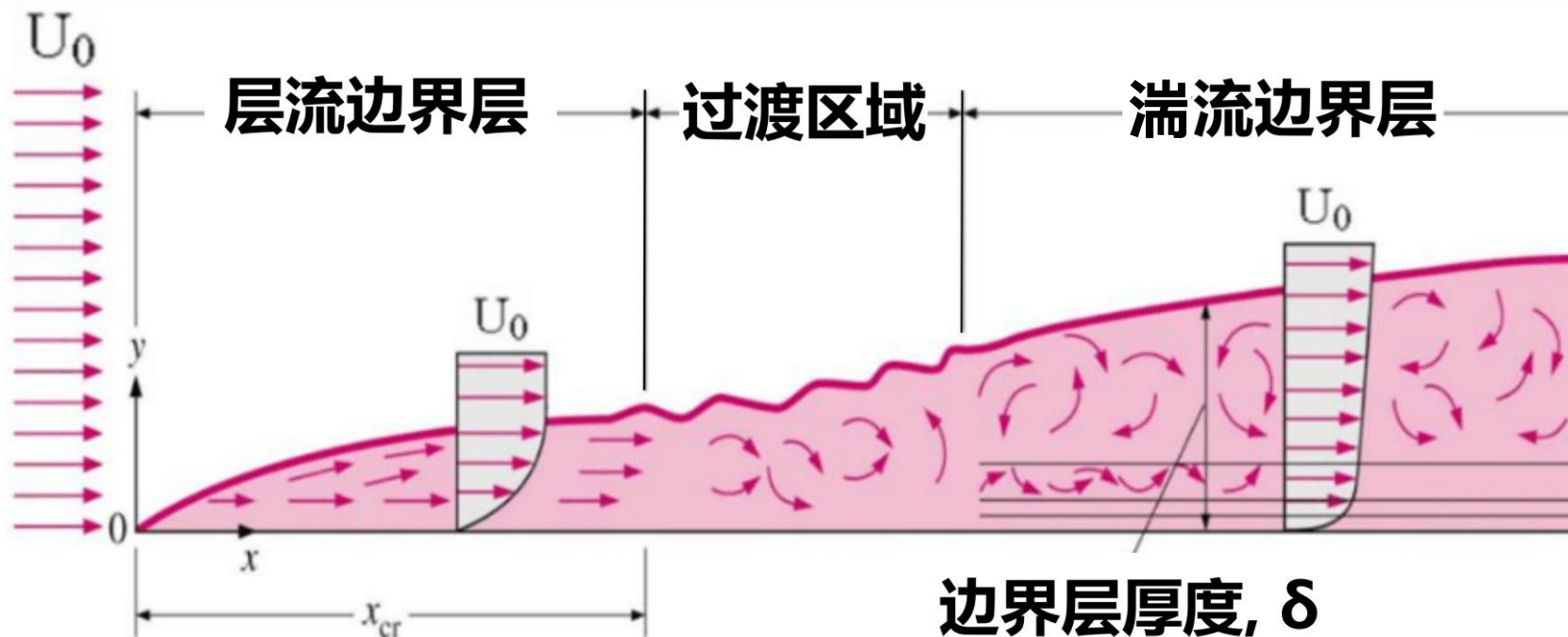
x - 离物体前缘点的距离

平板上的临界雷诺数

$$Re = 3 \times 10^5 \sim 10^6$$

1. 边界层的概念 - 层流边界层与紊流边界层

按流体流动的状态，可将流体流动分为**层流**和**湍流（紊流）**。



边界层的分类：

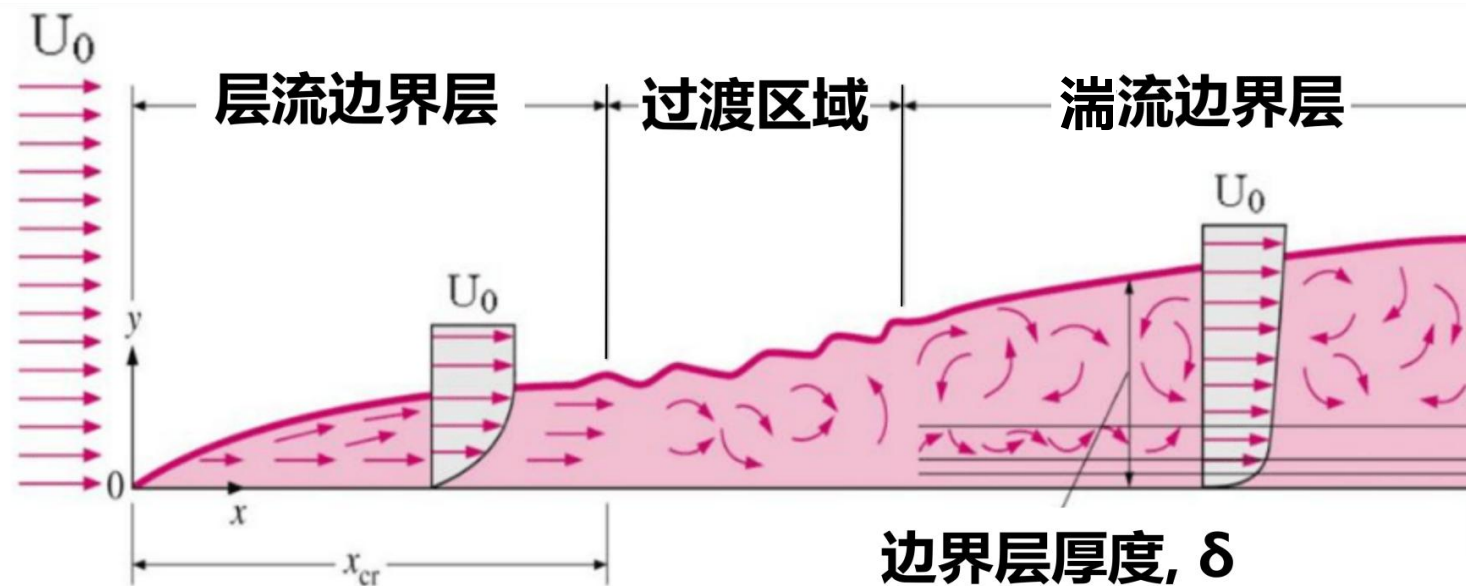
1. **层流边界层**，当Re较小时，边界层内全为层流，称为层流边界层；
2. **混合边界层**，除前部起始部分有一小片层流区，其余大部分为**湍流**区，称为混合边界层；
3. **湍流边界层**，当Re较大时，边界层内全为**湍流**，称为**湍流**边界层。

1. 边界层的概念 - 边界层的特征

按流体流动的状态，可将流体流动分为**层流**和**湍流（紊流）**。

边界层的特征：

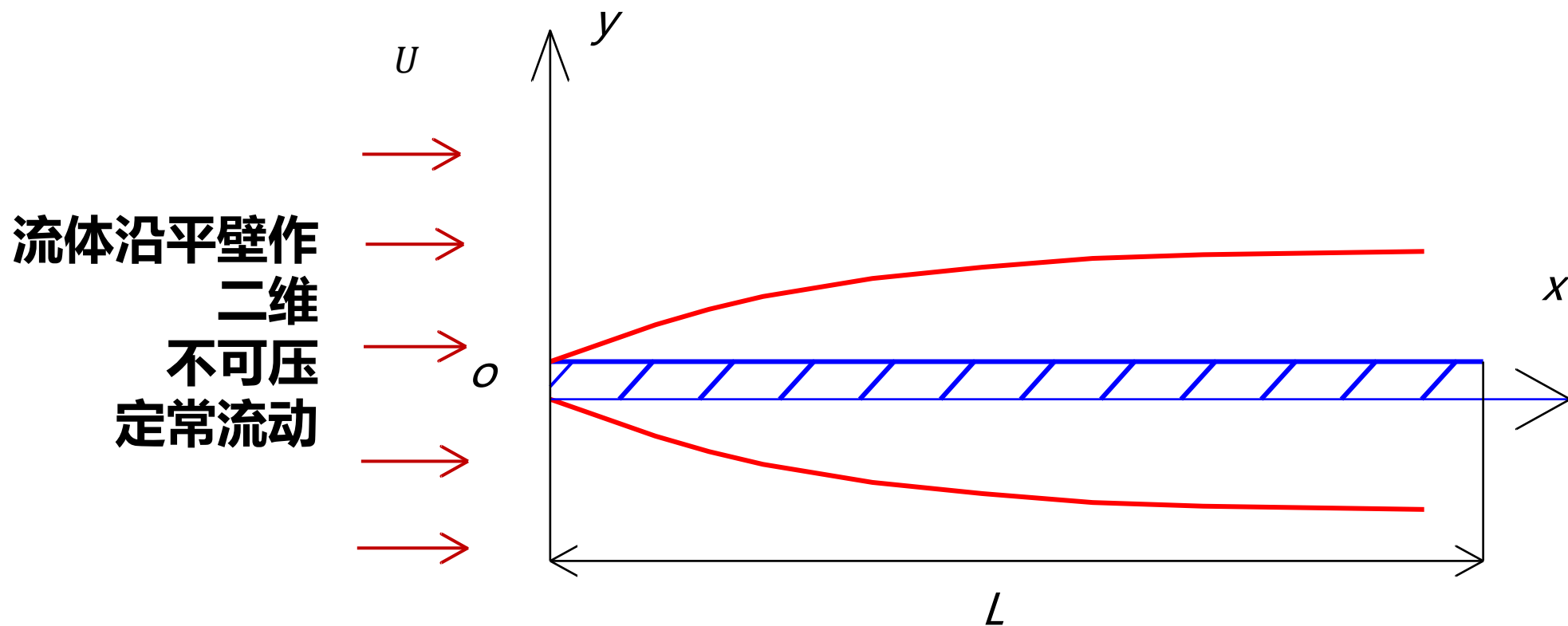
- ① 与物体的长度相比，边界层的厚度很小；
- ② 边界层内沿边界层厚度的速度变化非常急剧，即速度梯度很大；
- ③ 边界层沿着流体流动的方向逐渐增厚；
- ④ 边界层中各截面上的压强等于同一截面上边界层外边界上的压强；
- ⑤ 在边界层内黏滞力和惯性力是同一数量级的；
- ⑥ 边界层内流体的流动存在**层流**和**湍流**两种流动状态。



1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

根据以上6个特征，通过**量纲分析**和**数量级比较**简化N-S方程

假设：为简单起见，设流体沿平壁作**二维不可压定常流动**，假定边界层内流动状态为**层流**，同时**忽略质量力**。



1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

不可压缩粘性流动的NS方程（假设：层流、定常、忽略质量力、二维流动）：

$$\left. \begin{aligned} \cancel{\frac{\partial u}{\partial t}} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \cancel{\frac{\partial u}{\partial z}} &= \cancel{f_x} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}} \right) \\ \cancel{\frac{\partial v}{\partial t}} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \cancel{\frac{\partial v}{\partial z}} &= \cancel{f_y} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}} \right) \\ \cancel{\frac{\partial w}{\partial t}} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= \cancel{f_z} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \right\}$$

定常流动

忽略质量力

二维流动

问题：上述N-S 方程仍然无法直接求解，怎么办？ 思路：量纲分析。

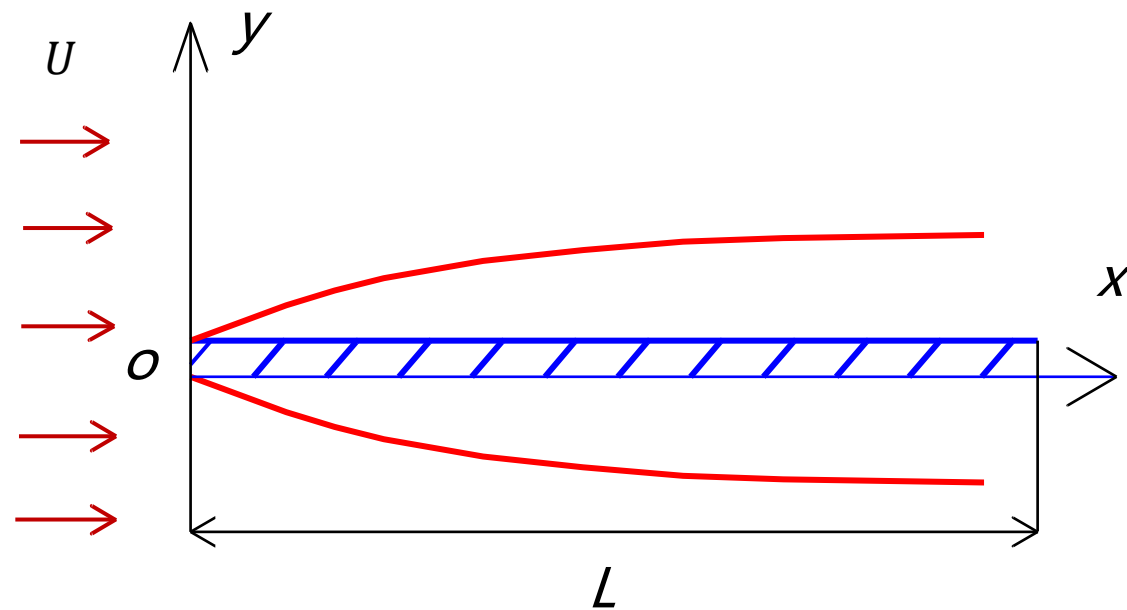
1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

1) 简化N-S方程为如下形式:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} (1)$$

边界条件:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad u = v &= 0 \\ y = \delta, \quad u &= U \end{aligned}$$



来流速度 U

边界层厚度 δ

平板前缘至某点距离 L

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

2) 进行量纲分析:

选择特征量: 特征速度 U ; 特征长度 L ;

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

继续变形, 可得到:

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

2) 进行量纲分析:

选择特征量: 特征速度 U ; 特征长度 L ;

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{u}{U}\right) \frac{\partial(u/U)}{\partial(x/L)} + \left(\frac{v}{U}\right) \frac{\partial(u/U)}{\partial(y/L)} &= -\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho U^2}\right)}{\partial(x/L)} + \left(\frac{v}{UL}\right) \left(\frac{\partial^2(u/U)}{\partial(x/L)^2} + \frac{\partial^2(u/U)}{\partial(y/L)^2}\right) \\ \left(\frac{u}{U}\right) \frac{\partial(v/U)}{\partial(x/L)} + \left(\frac{v}{U}\right) \frac{\partial(v/U)}{\partial(y/L)} &= -\frac{\partial\left(\frac{p}{\rho U^2}\right)}{\partial(y/L)} + \left(\frac{v}{UL}\right) \left(\frac{\partial^2(u/U)}{\partial(x/L)^2} + \frac{\partial^2(u/U)}{\partial(y/L)^2}\right) \\ \frac{\partial(u/U)}{\partial(x/L)} + \frac{\partial(v/U)}{\partial(y/L)} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

令: $x^* = \frac{x}{L}$, $y^* = \frac{y}{L}$, $u^* = \frac{u}{U}$, $v^* = \frac{v}{U}$, $p^* = \frac{p}{\rho U^2}$,

带入公式 (3) 得到:

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

2) 进行量纲分析:

$$\left. \begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq y \ll \delta &\rightarrow y \sim \delta \rightarrow \frac{y}{L} \sim \frac{\delta}{L} \rightarrow y^* \sim \delta^* \\ 0 \leq x \ll L &\rightarrow x \sim L \rightarrow \frac{x}{L} \sim 1 \rightarrow x^* \sim 1 \\ 0 \leq u \ll U &\rightarrow u \sim U \rightarrow \frac{u}{U} \sim 1 \rightarrow u^* \sim 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} &\sim 1 & \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} &\sim 1 \\ \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &\sim \frac{1}{\delta^*} & \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} &\sim \frac{1}{\delta^{*2}} \end{aligned}$$

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

2) 进行量纲分析:

$$\left. \begin{aligned} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \right) \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

由动量方程得: $\frac{\partial u^*}{\partial x^*} = -\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \sim 1$ 且 $y^* \sim \delta^*$  $v^* \sim \delta^*$

 $\frac{\partial v^*}{\partial x^*} \sim \delta^*$ $\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} \sim \delta^*$ $\frac{\partial v^*}{\partial y^*} \sim 1$ $\frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} \sim \frac{1}{\delta^*}$

将上述量级分析, 带入公式(4):

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

2) 进行量纲分析:

$$\begin{array}{l} u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = -\frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{Re_L} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial^2 y^{*2}} \right) \\ \begin{array}{ccccccc} 1 \cdot 1 & \delta^* \cdot \frac{1}{\delta^*} & 1 & 1 & \frac{1}{\delta^{*2}} & & \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*}} + \cancel{v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*}} = -\frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{Re_L} \left(\cancel{\frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}}} + \cancel{\frac{\partial^2 v^*}{\partial^2 y^{*2}}} \right) \\ \begin{array}{ccccccc} 1 \cdot \delta^* & \delta^* \cdot 1 & \frac{1}{\delta^*} & \delta^* & \frac{1}{\delta^*} & & \end{array} \end{array}$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} = 0$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & \end{array}$$

(5)

$\frac{1}{Re_L} \sim \delta^{*2}$ 黏性项, 量级为1

略去高阶小项

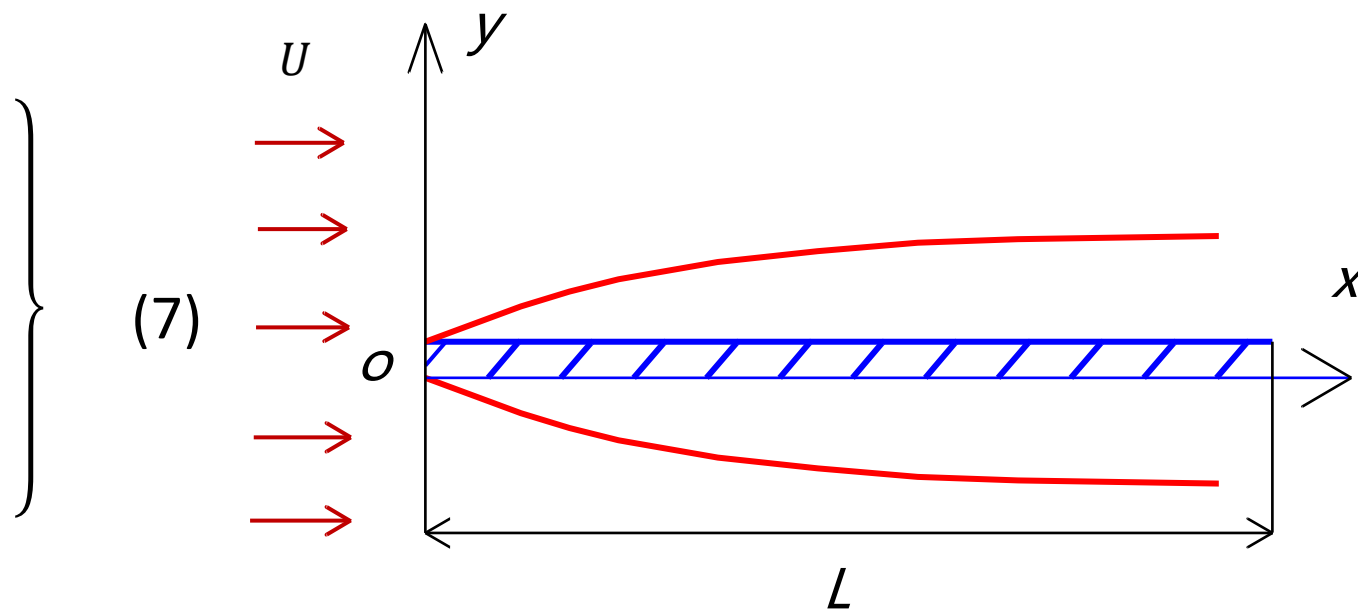
1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

3) 得到普朗克边界层方程:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$



边界条件为: $y = 0, \quad u = v = 0$

$y = \delta, \quad u = U$

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

4) 补充说明:

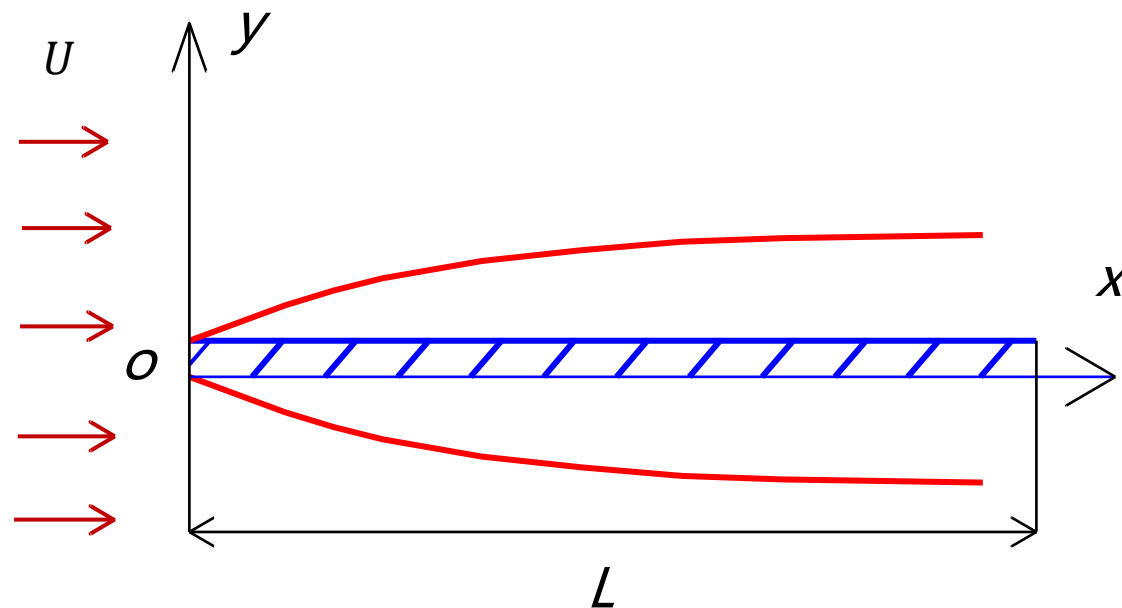
$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \boxed{\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

}

(7)



- 压强 p 只是 x 的函数, 即 $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{dx}$

边界条件为: $y = 0, \quad u = v = 0$

- 沿抛物面法线方向, 边界层内压强不变, 等于边界层界处势流压强。

$y = \delta, \quad u = U$

1. 边界层的概念 - 普朗特边界层微分方程

5) 普朗特边界层方程的另一种形式:

根据理想流体势流伯努利方程: $\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}U^2 = C$ (8a)

两边对x求导数: $-\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = U \frac{dU}{dx}$ (8b)

根据牛顿切应力公式: $\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$

将公式(8a)、(8b)带入公式 (7) 得:

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= U \frac{dU}{dx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dy} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8c)$$

$$\left. \begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{dp}{dy} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

上式即为普朗特边界层方程的另一表达形式。

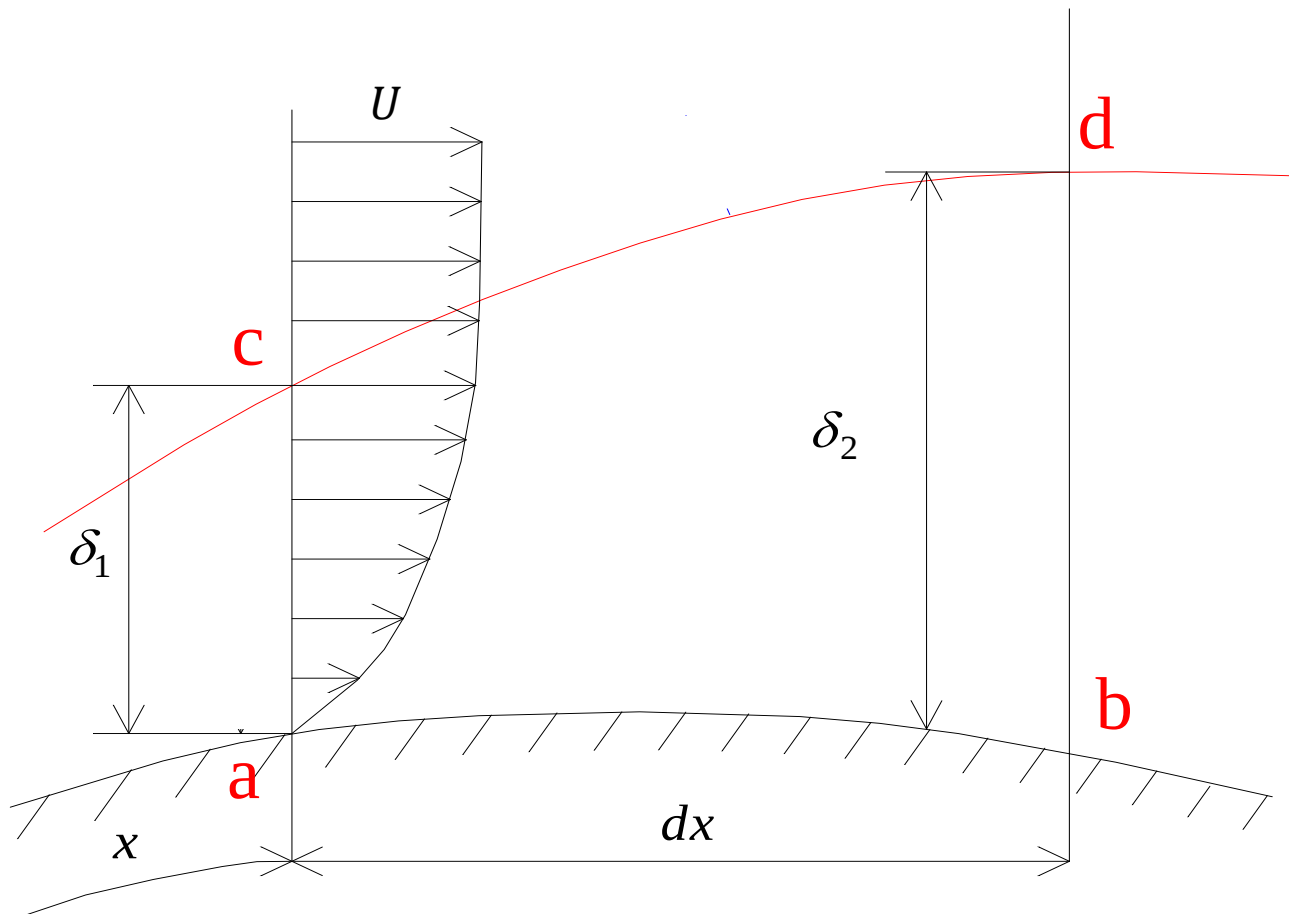
2. 绕平板流动边界层的近似计算

下面我们讨论卡门边界动量积分关系式，求解扰流阻力计算问题

(1) 沿边界层取微小控制体，建立质量、动量传递关系；

(2) 建立微小控制体的受力方程；

(3) 建立动量变化与应力间关系。



2. 绕平板流动边界层的近似计算

1) 控制体内的质量、动量传递

ac面流入的动量流率: $\dot{K}_{ac} = \int_0^{\delta_1} \rho u_1^2 dy$

质量流率: $\dot{m}_{ac} = \int_0^{\delta_1} \rho u_1 dy$

bd面流出的动量流率: $\dot{K}_{bd} = \int_0^{\delta_2} \rho u_2^2 dy$

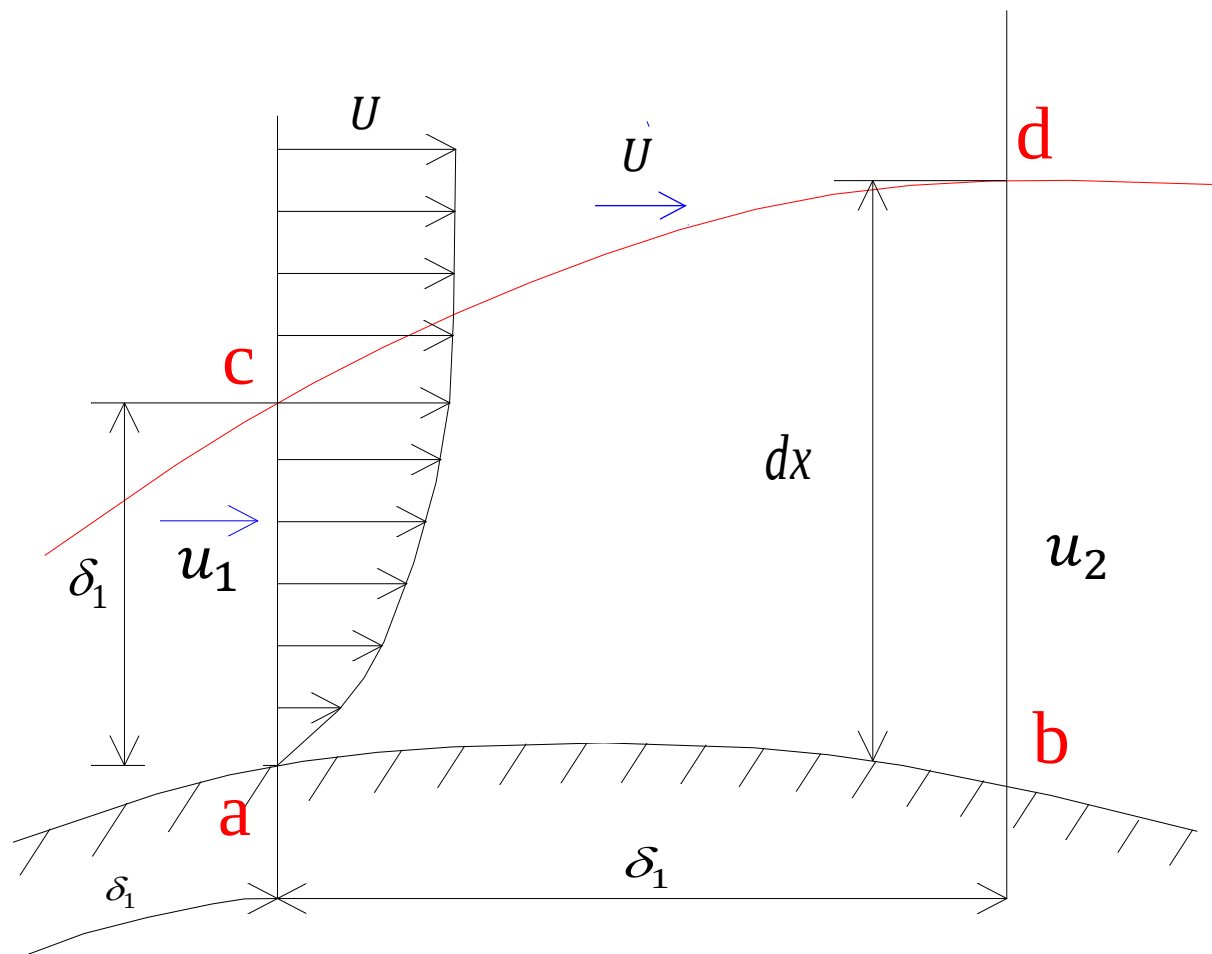
质量流率: $\dot{m}_{bd} = \int_0^{\delta_2} \rho u_2 dy$

- 根据质量守恒

cd面流入的质量流率:

$\dot{m}_{cd} = \dot{m}_{bd} - \dot{m}_{ac} = \int_0^{\delta_2} \rho u_2 dy - \int_0^{\delta_1} \rho u_1 dy$

cd面流入的动量流率: $\dot{K}_{cd} = U \left(\int_0^{\delta_2} \rho u_2 dy - \int_0^{\delta_1} \rho u_1 dy \right)$



2. 绕平板流动边界层的近似计算

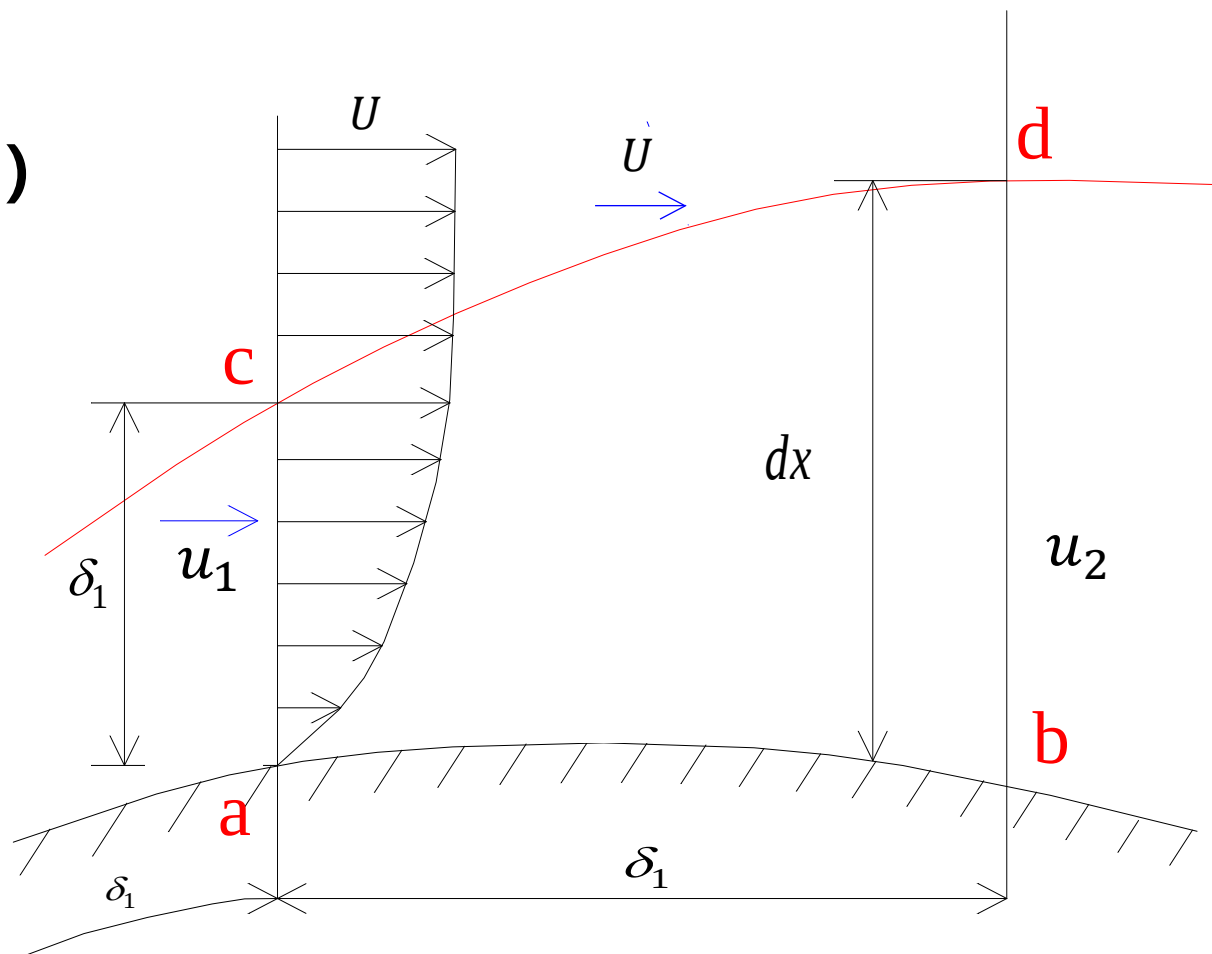
1) 控制体内的质量、动量传递

单位时间沿x方向经控制面的净动量（流出）

流率：

$$\Delta \dot{K} = \dot{K}_{bd} - \dot{K}_{ac} - \dot{K}_{cd}$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\delta_2} \rho u_2^2 dy - \int_0^{\delta_1} \rho u_1^2 dy \\ &\quad - U \left(\int_0^{\delta_2} \rho u_2 dy - \int_0^{\delta_1} \rho u_1 dy \right) \\ &= \rho U^2 \left\{ \int_0^{\delta_2} \left[\left(\frac{u_2}{U} \right)^2 - \frac{u_2}{U} \right] dy - \int_0^{\delta_1} \left[\left(\frac{u_1}{U} \right)^2 - \frac{u_1}{U} \right] dy \right\} \end{aligned}$$



整理可得：

$$\Delta \dot{K} = \rho U^2 \left\{ \int_0^{\delta_2} \left[\left(\frac{u_2}{U} \right)^2 - \frac{u_2}{U} \right] dy - \int_0^{\delta_1} \left[\left(\frac{u_1}{U} \right)^2 - \frac{u_1}{U} \right] dy \right\} \quad (13)$$

2. 绕平板流动边界层的近似计算

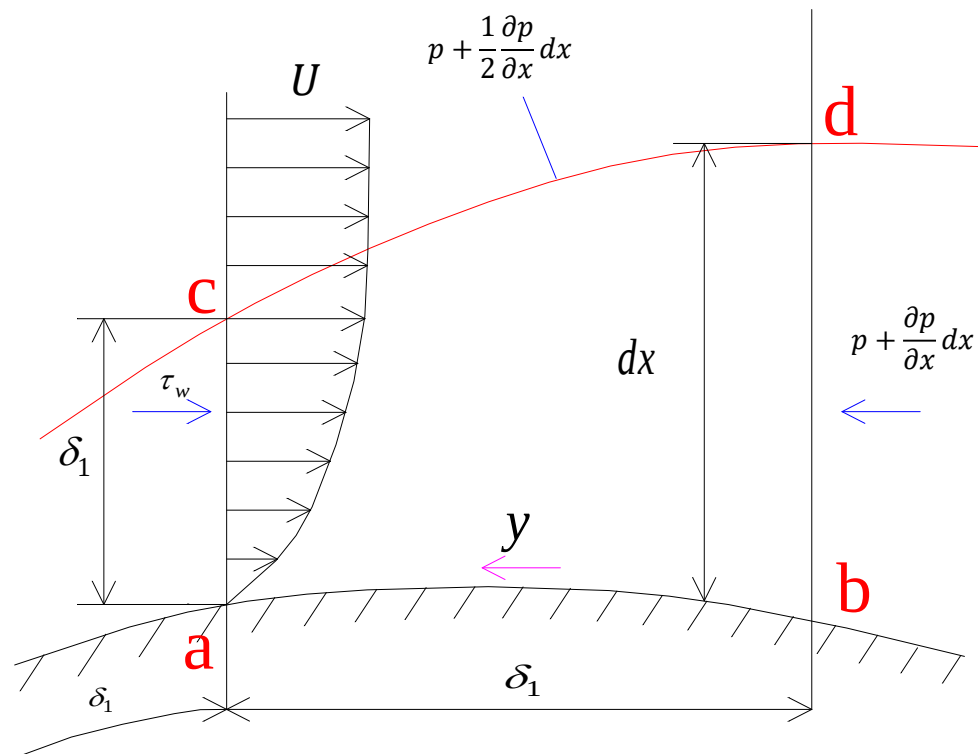
2) 控制体受力

ac 面上的总压力: $P_{ac} = p\delta_1$

bd 面上的总压力: $P_{bd} = \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) \delta_2$

cd 面上的总压力: $P_{cd} = \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx\right) (\delta_2 - \delta_1)$

ab 面上的切应力: $F_{ab} = -\tau_0 dx$



延x方向受到的合力:

$$\begin{aligned} & p\delta_1 + \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx\right) (\delta_2 - \delta_1) - \left(p + \frac{dp}{dx} dx\right) \delta_2 - \tau_0 dx \\ &= -\frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1) \frac{dp}{dx} dx - \tau_0 dx = -\delta \frac{dp}{dx} dx - \tau_0 dx \quad (18) \end{aligned} \quad \text{令: } \delta = \frac{1}{2} (\delta_2 + \delta_1)$$

2. 绕平板流动边界层的近似计算

3) 建立动量变化与应力间关系

根据动量定理得：

$$\delta \frac{dp}{dx} dx + \tau_0 dx = \rho U^2 \left\{ \int_0^{\delta_2} \left[\frac{u_2}{U} - \left(\frac{u_2}{U} \right)^2 \right] dy - \int_0^{\delta_1} \left[\frac{u_1}{U} - \left(\frac{u_1}{U} \right)^2 \right] dy \right\}$$

令：

$$f_1 = \int_0^{\delta_1} \left[\frac{u_1}{U} - \left(\frac{u_1}{U} \right)^2 \right] dy$$
$$f_2 = \int_0^{\delta_2} \left[\frac{u_2}{U} - \left(\frac{u_2}{U} \right)^2 \right] dy$$

$dx \rightarrow 0$

$\rightarrow df \rightarrow f_2 - f_1$

$\rightarrow$

$$\delta \frac{dp}{dx} + \tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left[\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy \quad (20) \quad \text{卡门边界层动量积分方程}$$

注：因对流动特性和切应力无假设，上述动量积分方程对层流和湍流都适用。

2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板层流边界层的近似计算

$$\cancel{\delta \frac{dp}{dx}} + \tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy$$

由于边界层很薄，对势流区影响小，因此假设：

$$U(x) \approx U_\infty$$

未知变量： $\cancel{p(x)}$ $\tau_0(\delta)$ $u(y)$

结合伯努利方程：

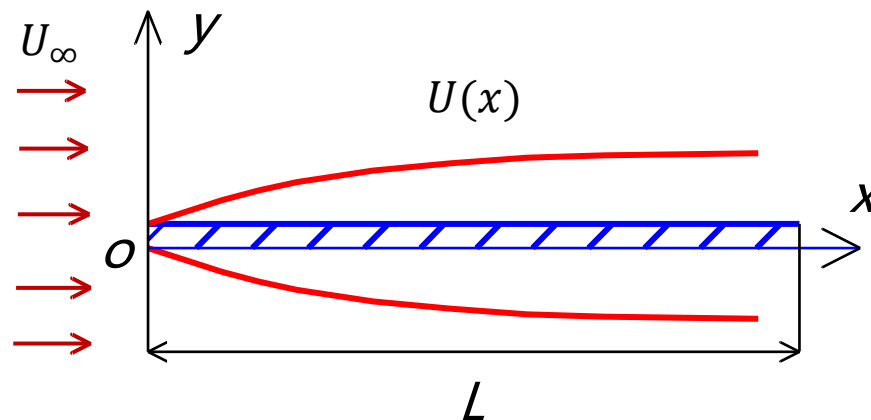
$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} U^2 = C$$

边界层外边界压强 p 为常数

$$\frac{dp}{dx} = 0$$



$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy \quad (21)$$



2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板层流边界层的近似计算

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy \quad (20)$$

未知变量: $\tau_0(\delta)$ $u(y)$

采用幂级数分解 $u(y)$, 可得边界层内速度分布:

$$u(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

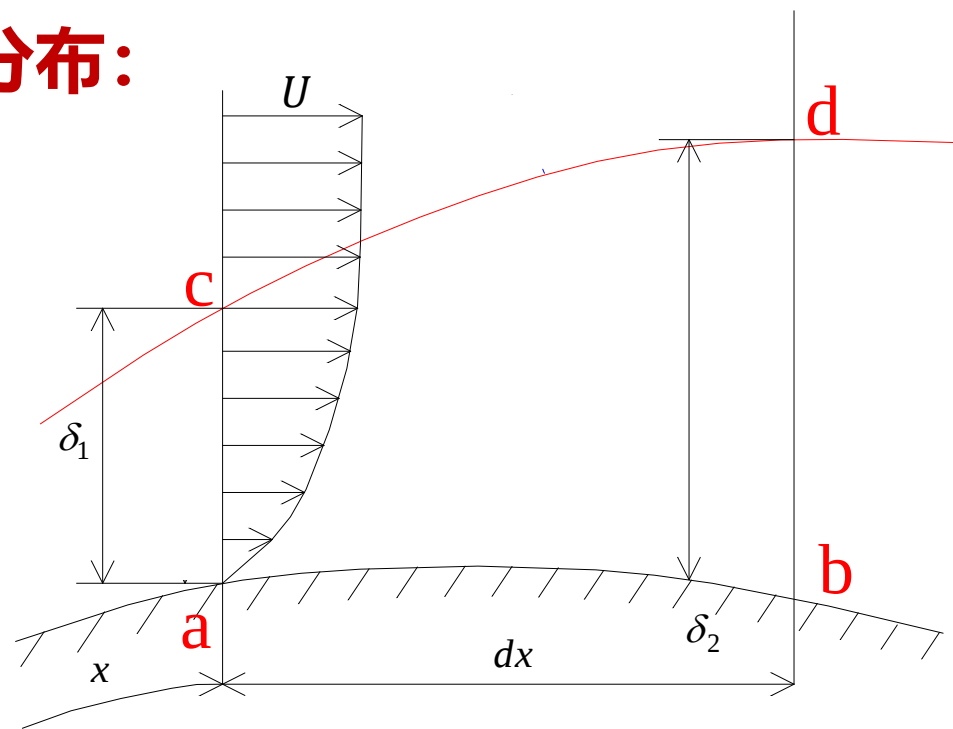
根据边界条件:

$$y = 0, u = 0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = 0$$

$$y = \delta, u = U_\infty \quad \Rightarrow \quad U = a_1 \delta + a_2 \delta^2$$

$$y = \delta, \frac{du}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = a_1 + 2a_2 \delta$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{U}{\delta^2} \quad a_1 = \frac{2U}{\delta} \quad \Rightarrow \quad u(y) = \frac{2U}{\delta} y - \frac{U}{\delta^2} y^2 \quad (22)$$



2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板层流边界层的近似计算

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy \quad (20)$$

未知变量: $\tau_0(\delta)$ $u(y)$

$$u(y) = \frac{2U}{\delta} y - \frac{U}{\delta^2} y^2 \quad (22)$$

根据牛顿内摩擦定律获得 $\tau_0(\delta)$

$$\tau_0 = \mu \left(\frac{du}{dy} \right)_{y=0} = \mu \left[\frac{2U}{\delta} - \cancel{\frac{2U}{\delta^2} y} \right]_{y=0} = \frac{2\mu U}{\delta} \quad (23)$$

将公式(22)、(23)带入(20):

$$\frac{2\mu U}{\delta} = \frac{2}{15} \rho U^2 \frac{d\delta}{dx}$$

积分得:



$$\delta^2 = \frac{30\nu}{U} x + C$$

考虑边界条件: $x = 0, \delta = 0$ 因此, $C=0$ 

$$\delta = \sqrt{\frac{30\nu}{U} x} = 5.48 x Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板层流边界层的近似计算：计算平板扰流的摩擦阻力

$$\delta = \sqrt{\frac{30\nu}{U}} x = 5.48 x Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad (24)$$

首先计算切应力：

$$\tau_0 = \frac{2\mu U}{\delta} = \sqrt{\frac{2\mu\rho U^3}{15x}} = 0.365\rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} = 0.365\rho U^2 Re_x^{-\frac{1}{2}} \quad (25)$$

沿平板积分，获取总摩擦力，平板宽度 **b** ，长度 **L**

$$F_D = b \int_0^L \tau_0 dx = \int_0^L 0.365\rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{Ux}} dx = 0.73bL\rho U^2 \sqrt{\frac{\nu}{UL}} = 0.73bL\rho U^2 Re_L^{-\frac{1}{2}} \quad (26)$$

定义阻力系数 C_D ，其中 **A** 为边界层物面的总面积

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \quad (27)$$

带入(26)可得平板扰流的摩擦阻力系数：

$$C_D = 1.46 Re_L^{-\frac{1}{2}} \quad (28)$$

2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板层流边界层的近似计算：近似解与精确解对比

近似解：

$$C_D = 1.46 Re_L^{-\frac{1}{2}} \quad (28a)$$

布拉休斯精确解：

$$C_D = 1.33 Re_L^{-\frac{1}{2}} \quad (28b)$$

相对误差~10%!

请大家思考误差产生的原因，这一误差是否可以接受？

如何进一步减少这个误差？

边界层内速度分布假设：

$$u(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2$$

我们还做了哪些假设？

且待片刻，我们稍后分析....

2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板湍流边界层的近似计算

$$\tau_0 = \rho U^2 \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left[\frac{u}{U} - \left(\frac{u}{U} \right)^2 \right] dy \quad (21)$$

采用管内湍流运动规律，描述平板湍流速度分布：

$$\frac{u}{U} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (29)$$

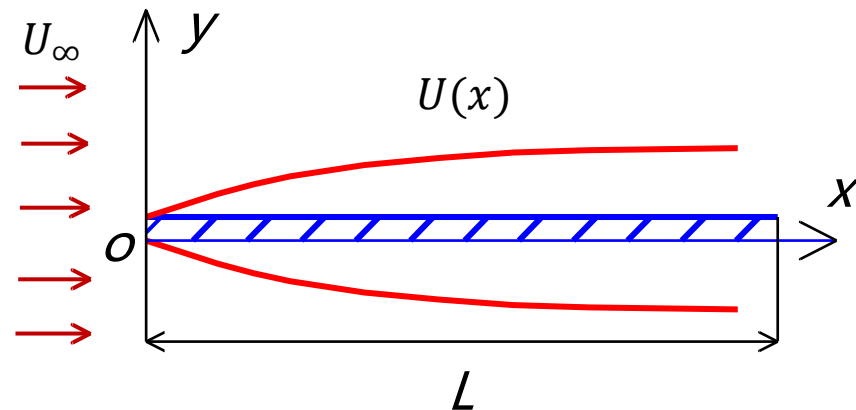
采用施利希廷半经验公式，描述切应力：

$$\tau_0 = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (30)$$

将(29)、(30)带入公式(21)：

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{d}{dx} \int_0^\delta \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \left[1 - \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{7}} \right] dy$$

化简
→



2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板湍流边界层的近似计算

化简后积分得:

$$0.0225 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{\frac{1}{4}} = \frac{7}{72} \frac{d\delta}{dx}$$

则边界层厚度:

$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} + C$$

考虑边界条件:

$$x = 0, \delta = 0 \quad \longrightarrow \quad C = 0$$

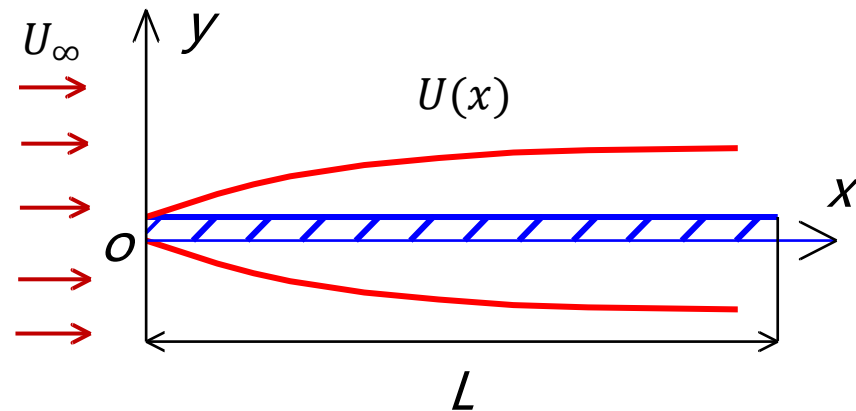


$$\delta = 0.37 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} x^{\frac{4}{5}} = 0.37 x Re_x^{-\frac{1}{5}} \quad (31)$$

将(31)代入(30):



$$\tau_0 = 0.0289 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U\delta} \right)^{\frac{1}{5}} = 0.0289 \rho U^2 Re_x^{-\frac{1}{5}} \quad (32)$$



2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板湍流边界层的近似计算

总摩擦阻力:

$$\begin{aligned} F_D &= b \int_0^L \tau_0 dx = 0.0289 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{\frac{1}{5}} b \int_0^L x^{-\frac{1}{5}} dx \\ &= 0.036 b L \rho U^2 \left(\frac{\nu}{UL} \right)^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

$$= 0.036 b L \rho U^2 Re_L^{-\frac{1}{5}}$$

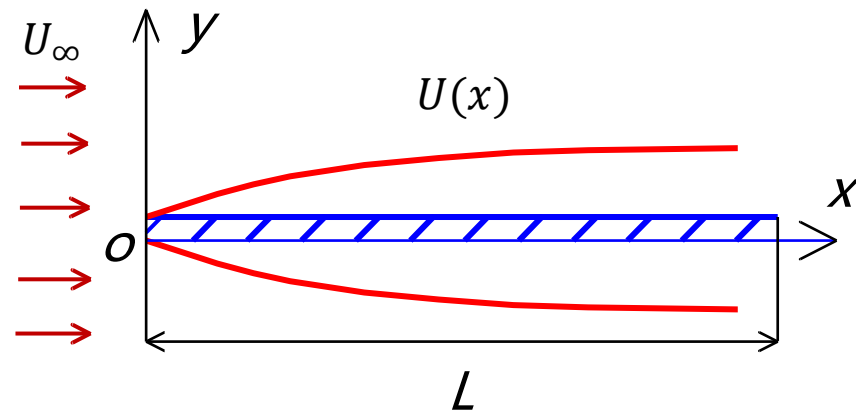
(33)

摩擦阻力系数:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho U^2 b L} = 0.072 Re_L^{-\frac{1}{5}}$$

(34)

公式适用范围: $5 \times 10^5 \leq Re_L \leq 10^7$

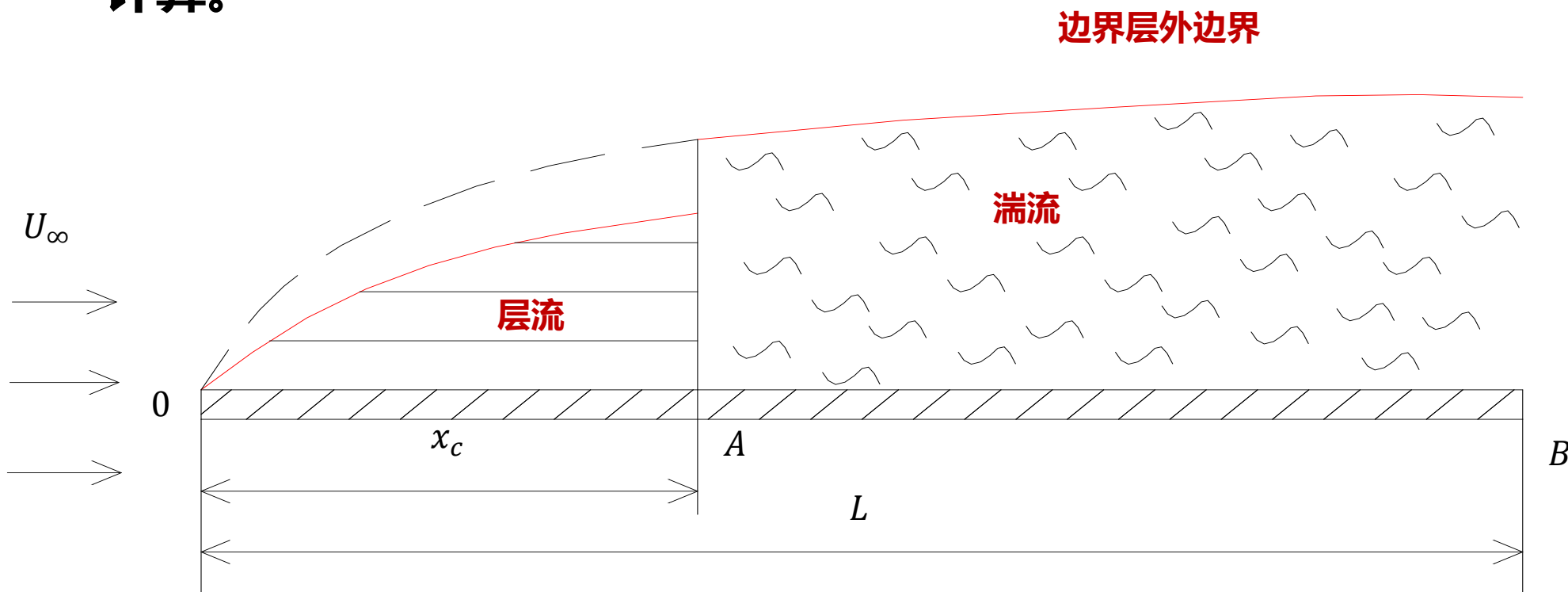


2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板的混合边界层的近似计算

两个假设：

- (1) 在平板的A点层流边界层突然转变为湍流边界层（实际上应有混合区域）；
- (2) 湍流边界层的厚度变化、层内速度和切向应力的分布都从前缘点O开始计算。



2. 绕平板流动边界层的近似计算

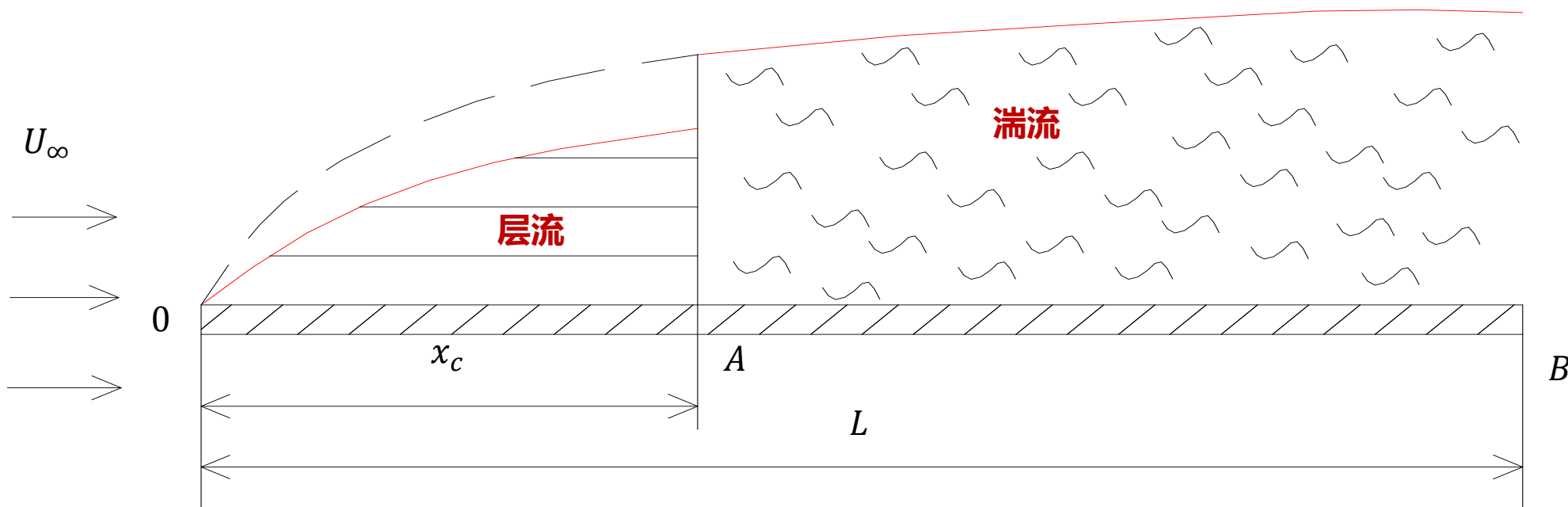
平板的混合边界层的近似计算

混合边界层的**总摩擦阻力**为**层流边界层摩擦阻力**与**湍流边界层摩擦阻力**之和：

$$F_{DM} = F_{DT} \Big|_{0 \leq x \leq L} - F_{DT} \Big|_{0 \leq x \leq x_c} + F_{DL} \Big|_{0 \leq x \leq x_c} \quad (37)$$

其中， F_{DM} 代表混合边界层的总摩擦力， F_{DL} 表示层流边界层的总摩擦力， F_{DT} 代表湍流边界层的总摩擦阻力。

边界层外边界



2. 绕平板流动边界层的近似计算

平板的层流、湍流边界层近似计算的比较

(1) 速度分布规律:

湍流边界层内沿平板壁面法向截面上的速度比层流边界层的速度增加得快。

(2) 边界层厚度:

沿平板壁面湍流边界层的厚度比层流边界层得厚度增长得快。

(3) 切向应力:

在其他条件相同的情况下，平板壁面上湍流边界层中的切向应力沿着壁面的减小要比层流边界层中的减小慢些。

(4) 摩擦阻力系数:

在同一雷诺数下，湍流边界层的摩擦阻力系数比层流边界层的大得多。

2. 绕平板流动边界层的近似计算

流体纵向流过平板：

- 当不可压缩黏性流体纵向流过平板时，在边界层外部势流沿平板方向的速度是相同的，而且整个流场和边界层内的压强都保持不变。

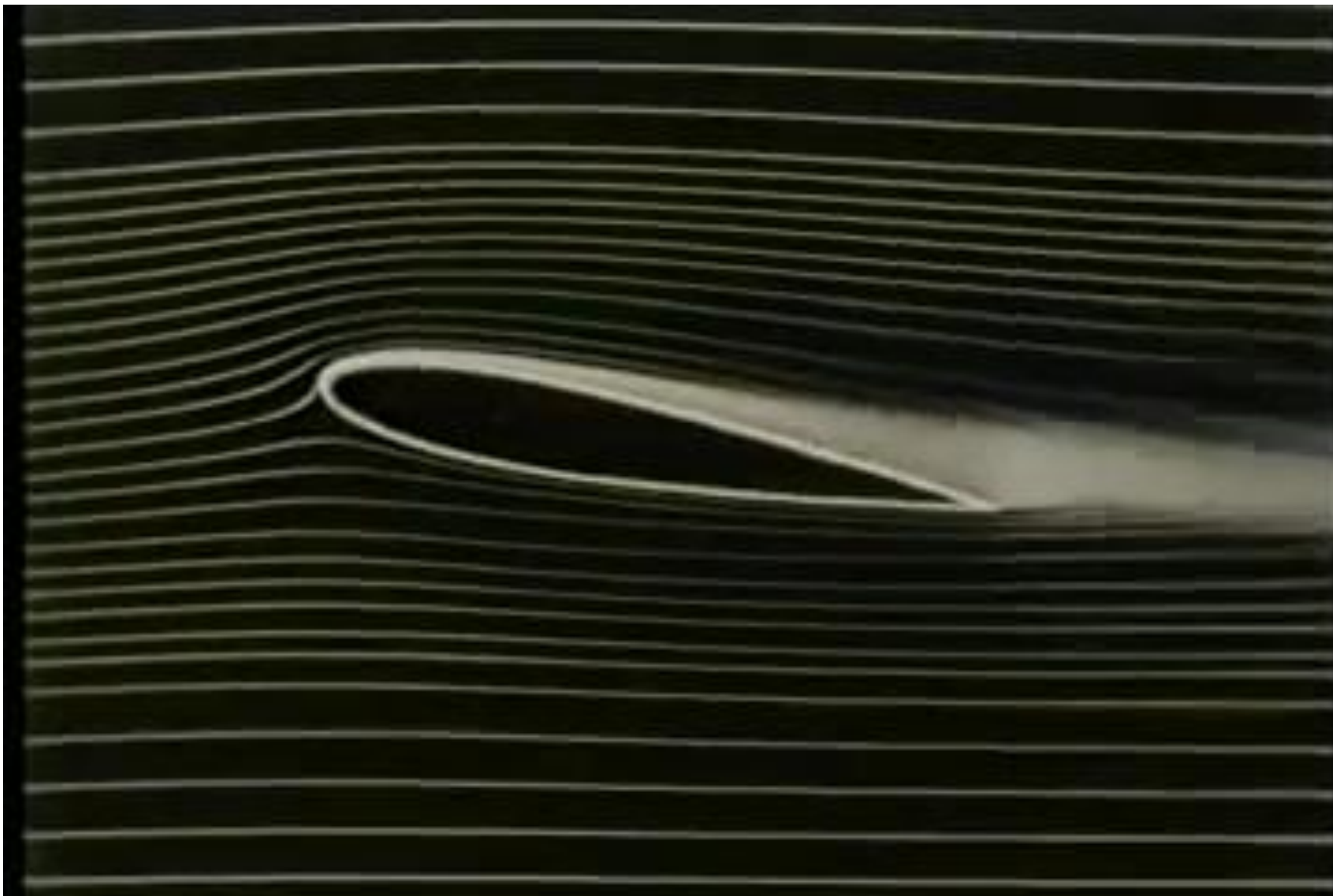
流体流过曲面物体：

- 当黏性流体流经曲面物体时，边界层外边界上沿曲面方向的速度是改变的，所以曲面边界层内的压强也将同样发生变化，对边界层内的流动将产生影响。

接下来，我们将分析和讨论曲面边界层的分离现象。

3. 绕曲面流动及边界层的分离

边界层分离现象



video:
Frederick Abernathy,
Harvard University.

3. 绕曲面流动及边界层的分离

边界层分离现象: 什么是边界层分离现象? 研究他对工程实际有何意义?



汽车工业: 汽车的流线型设计、流线紧贴汽车表面, 避免尾部涡流, 减少阻力, 减少噪声。

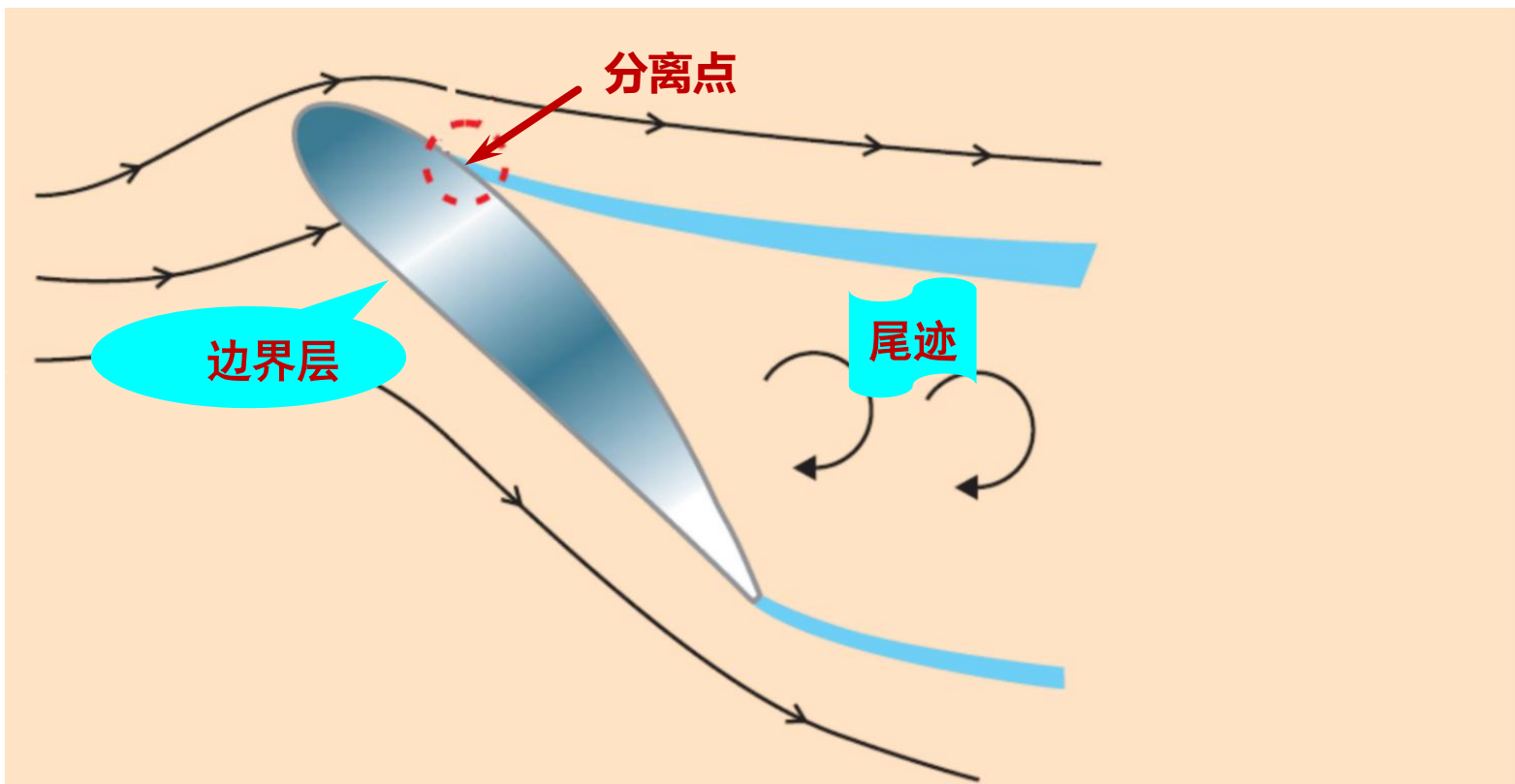
3. 绕曲面流动及边界层的分离

边界层分离引起的飞机失速



3. 绕曲面流动及边界层的分离

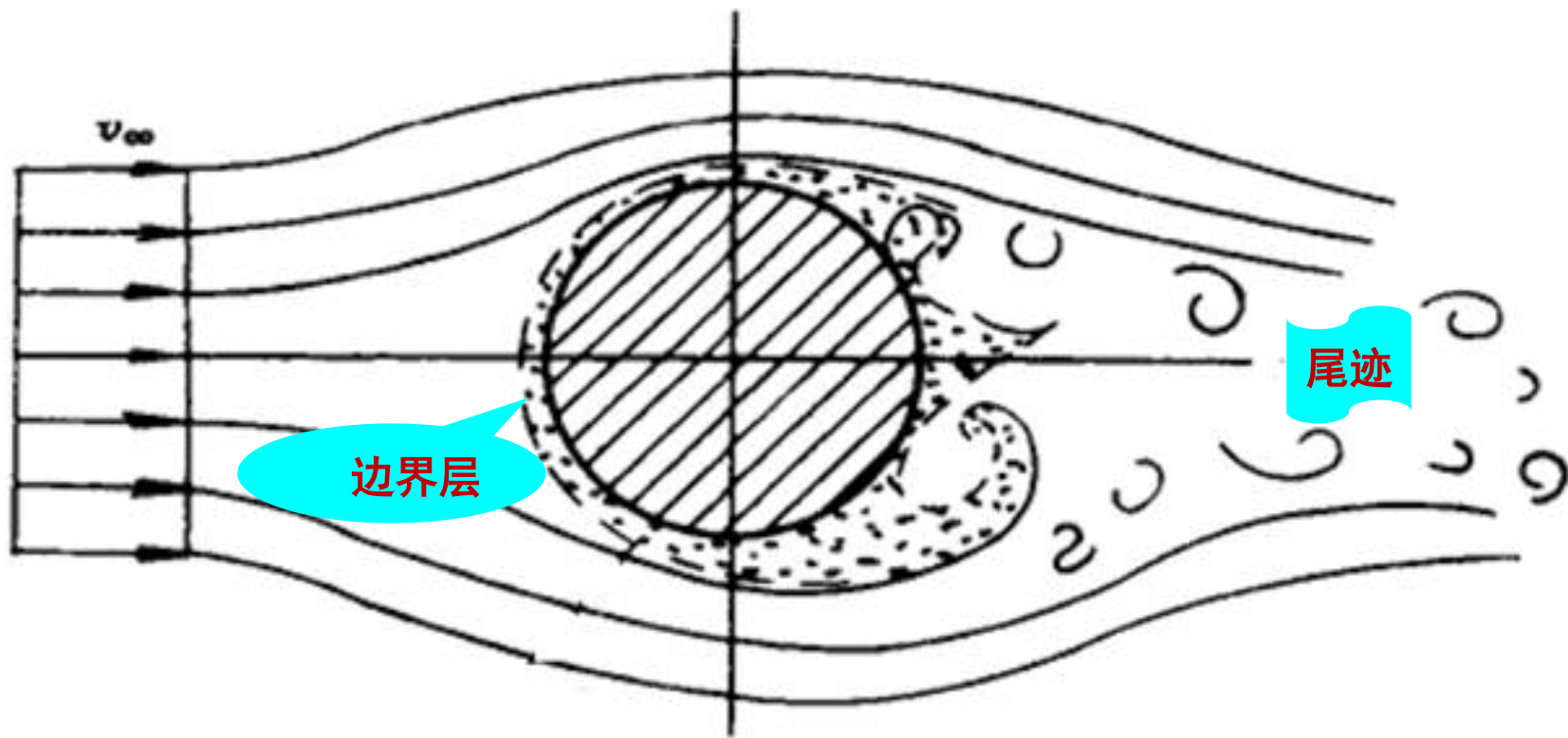
在实际工程中，物体的边界往往是曲面（流线型或非流线型物体）。当流体绕流非流线型物体时，一般会出现下列现象：物面上的边界层在某个位置开始脱离物面，并在物面附近出现与主流方向相反的回流。流体力学中称这种现象为**边界层分离现象**。



流线型物体的
边界层分离现象
示意图

3. 绕曲面流动及边界层的分离

在实际工程中，物体的边界往往是曲面（流线型或非流线型物体）。当流体绕流非流线型物体时，一般会出现下列现象：物面上的边界层在某个位置开始脱离物面，并在物面附近出现与主流方向相反的回流。流体力学中称这种现象为**边界层分离现象**

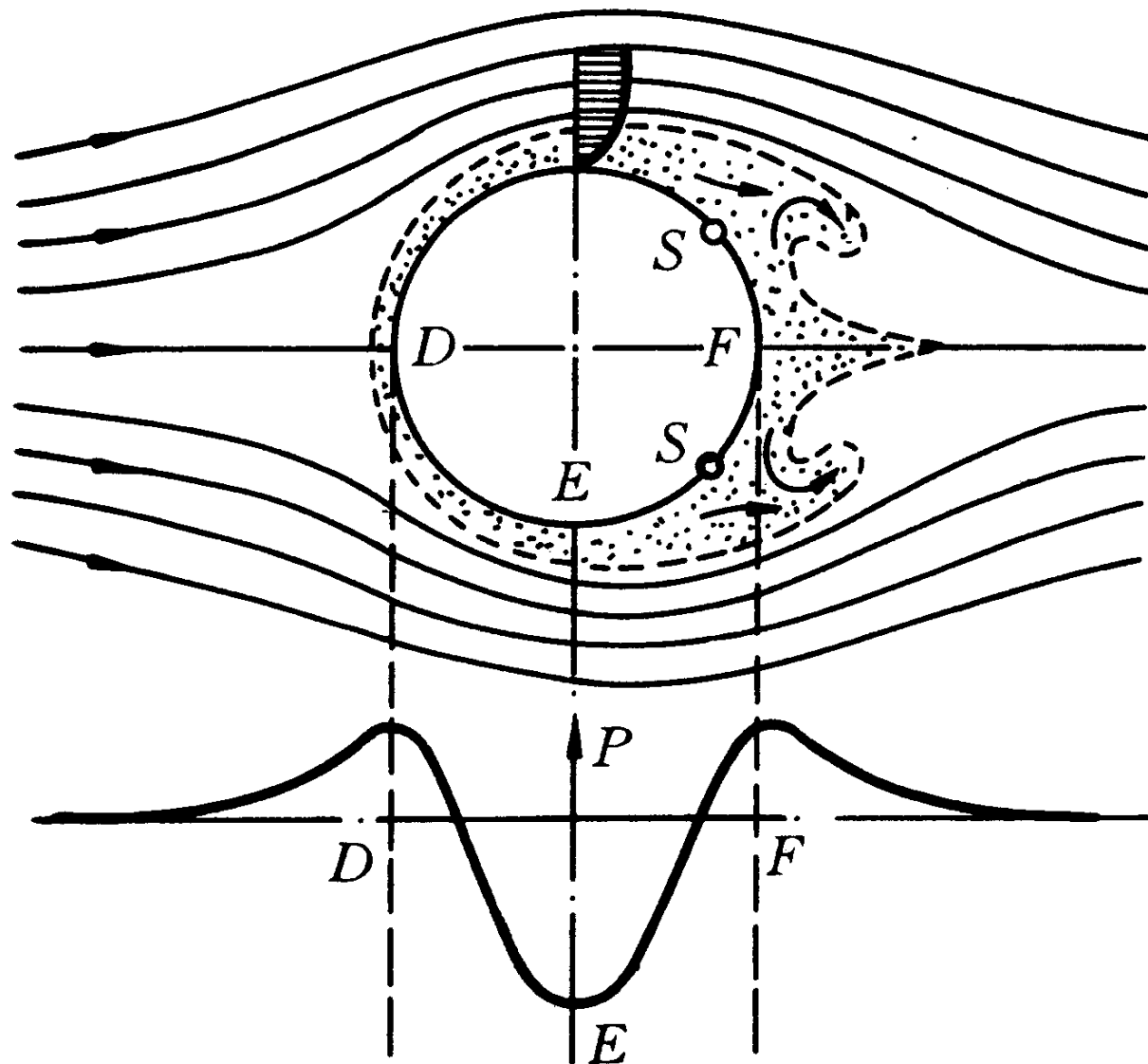


非流线型物体的
边界层分离现象
示意图

3. 绕曲面流动及边界层的分离

边界层分离发生的原因

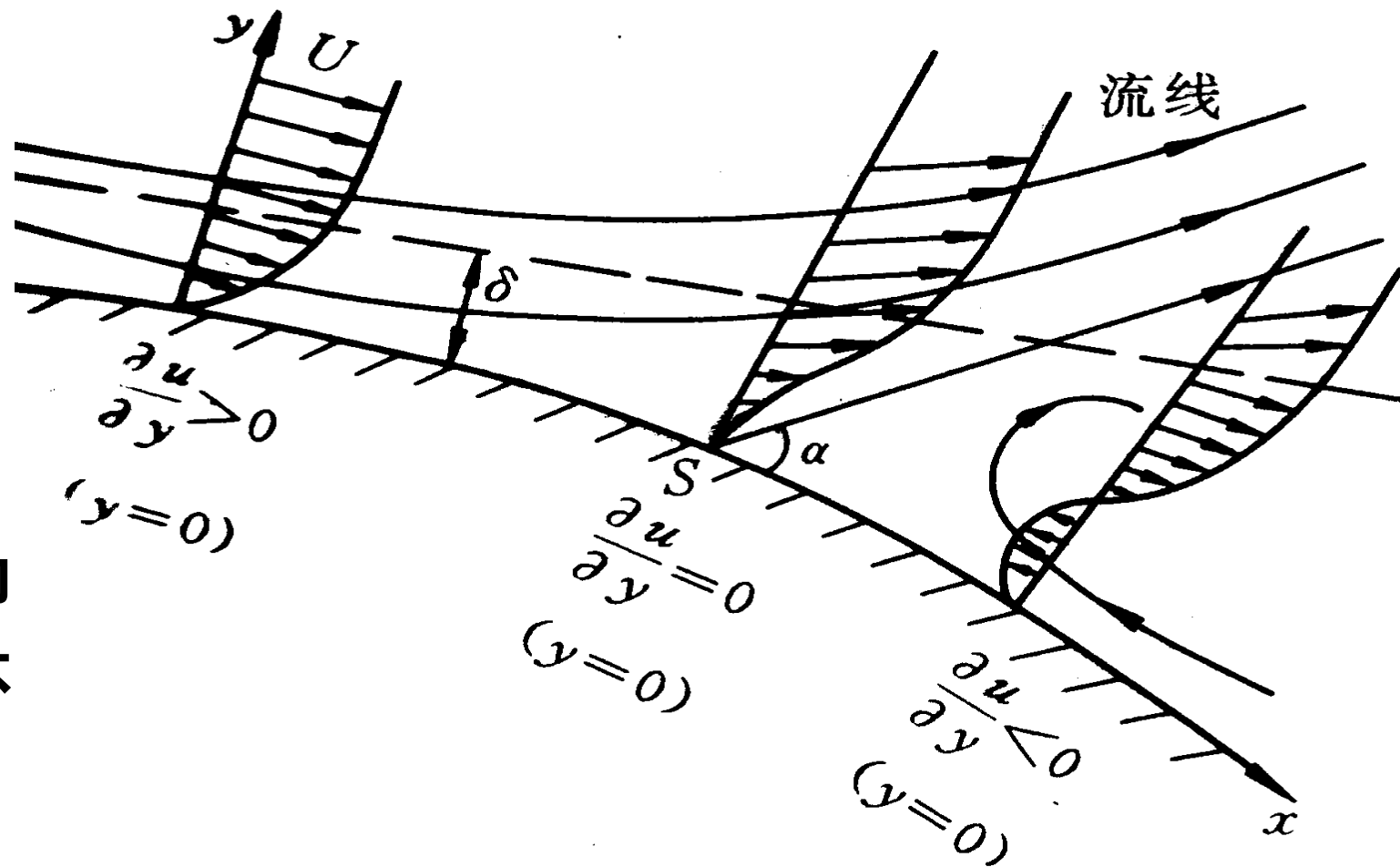
- 从D到E流动加速，为顺压梯度区；流体压能向动能转变，不发生边界层分离。
- 从E到F流动减速，为逆压梯度区；从E到F段动能只存在损耗，速度减小很快。
- 在S点处出现黏滞，由于压力的升高产生回流导致边界层分离，并形成尾涡。



3. 绕曲面流动及边界层的分离

边界层分离发生的过程

边界层分离过程示意图



判断边界层分离是否发生:

- 黏性流体在压力降低区内流动（加速流动），决不会出现边界层的分离。
- 只有在**压力升高区**内流动（减速流动），才有可能出现分离形成涡旋；尤其是在主流流动减速足够大的情况下，边界层的分离就一定会发生。

3. 绕曲面流动及边界层的分离

边界层分离发生的过程：边界层脱离壁面

a) 分离现象

圆柱后部：猫眼

在顺压梯度区 (BC)：流体加速

在逆压梯度区 (CE)：CS段减速

→ S点停止 → SE倒流



b) 分离的原因

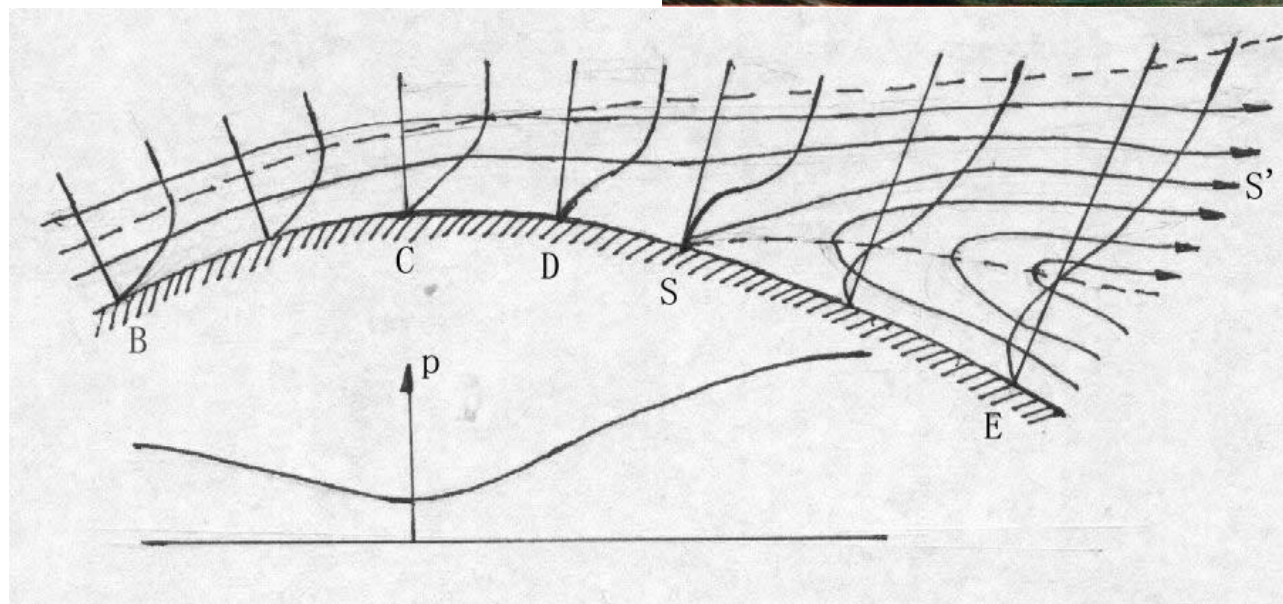
流体黏性

c) 分离的条件

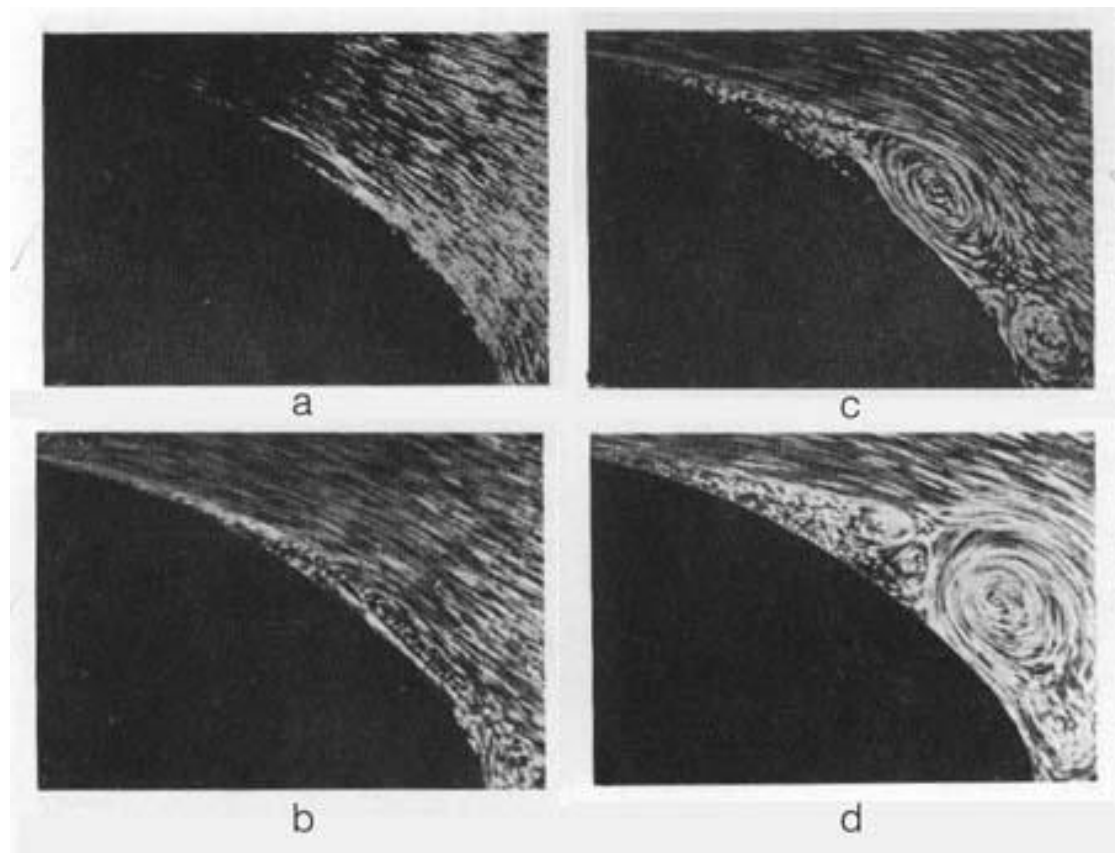
逆压梯度

d) 分离的发生

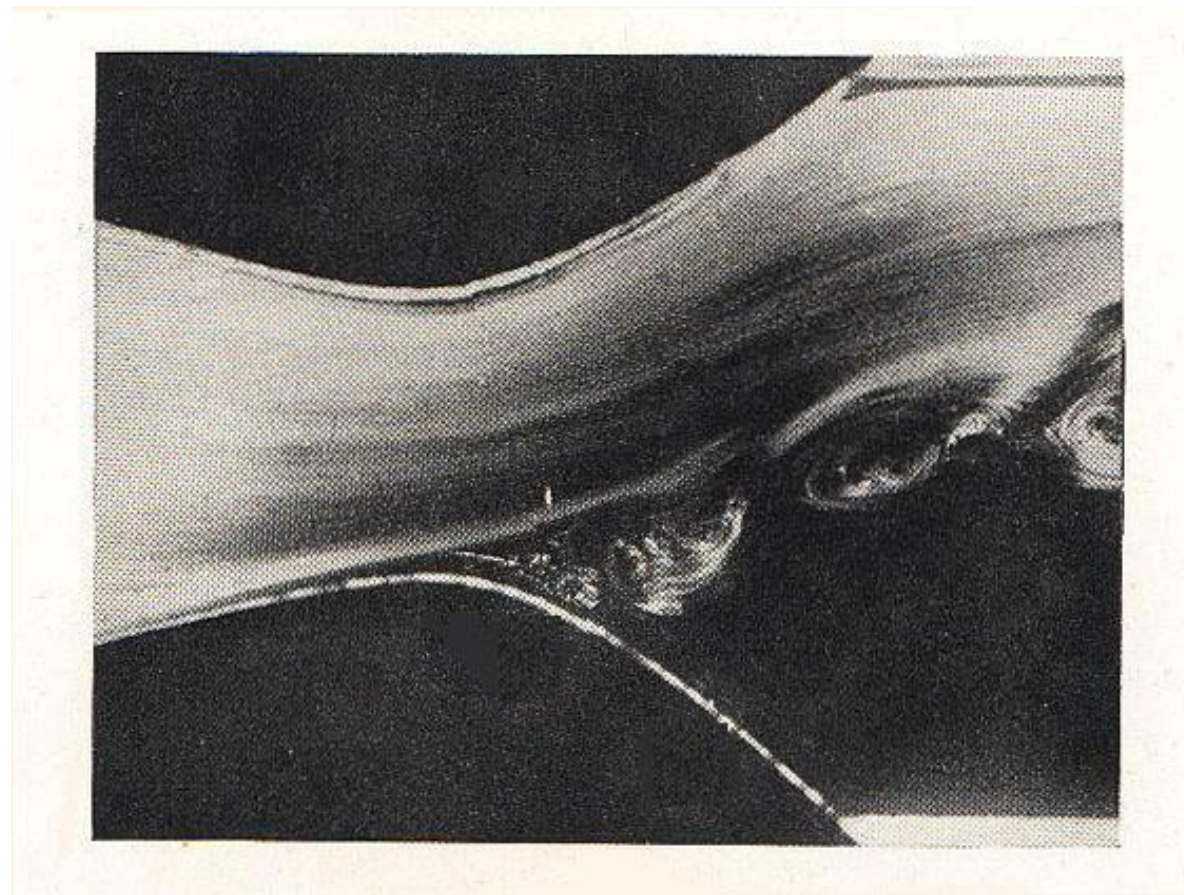
流体微团滞止和倒流



3. 绕曲面流动及边界层的分离



从静止开始边界层发展情况

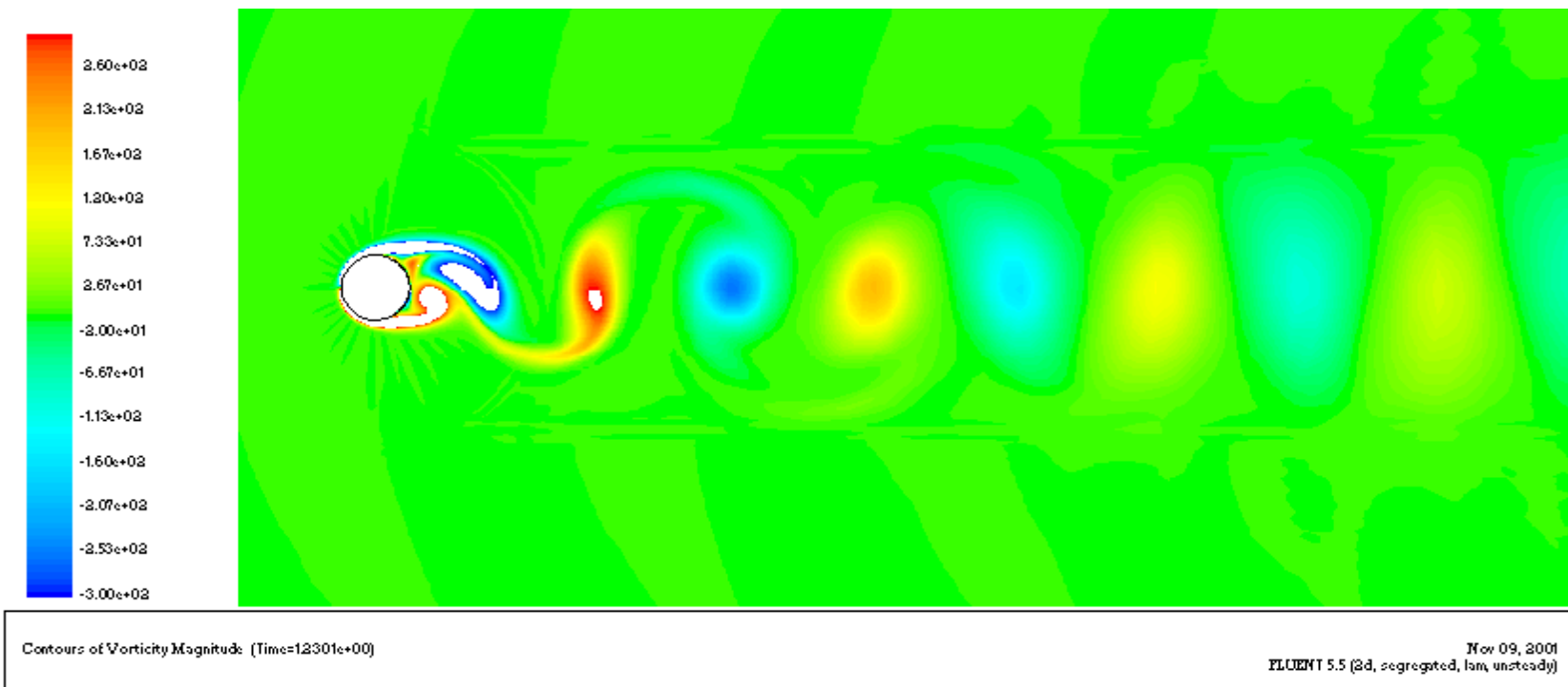


扩张管（上壁有抽吸）

- **注意：**普朗特边界层方程，仅适用于**分离点以前**的区域。
- **原因：**分离点后出现**回流**， u 、 v 的数量级发生很大变化。

3. 绕曲面流动及边界层的分离

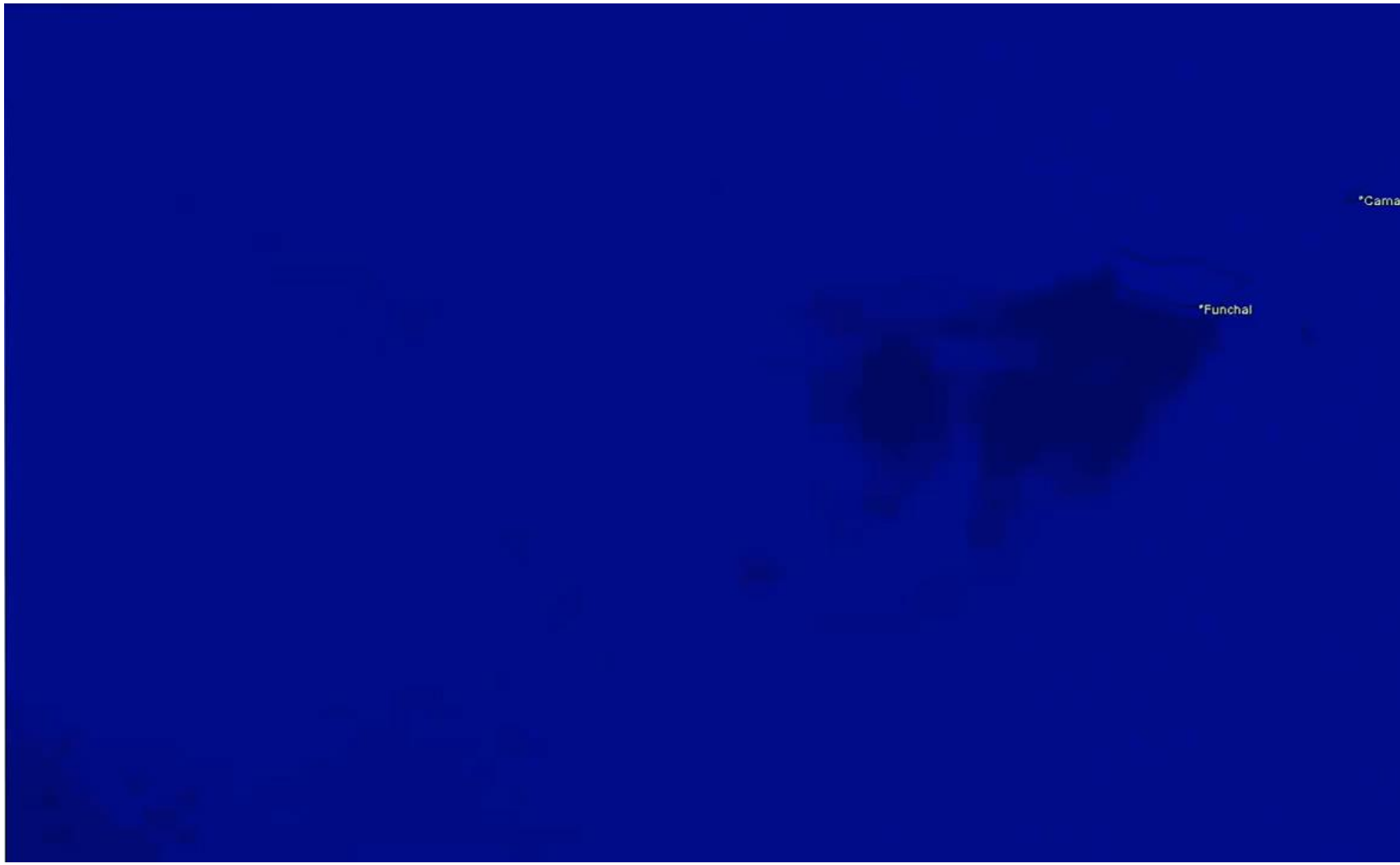
圆柱绕流问题 与 卡门涡街



- **圆柱绕流问题**：随着雷诺数的增大边界层首先出现分离，分离点并不不断的前移，当雷诺数大到一定程度时，会形成两列几乎稳定的、非对称性的、交替脱落的、旋转方向相反的旋涡，并随主流向下游运动，这就是**卡门涡街**。
- 卡门对涡街进行运动分析得出了**涡列间几何关系**、**阻力**、**涡释放频率**以及**斯特罗哈数**的经验公式。
- 当**涡释放频率**和**物体固有频率**接近，产生共振，危害很大。

3. 绕曲面流动及边界层的分离

大自然中的卡门涡街现象



马德拉岛附近的卡门涡街

image: <https://www.visibleearth.nasa.gov/>;

3. 绕曲面流动及边界层的分离 - 卡门涡街

圆柱绕流问题与卡门涡街

圆柱体的卡门涡街的**脱落频率** n 与流体流动的速度 U_{∞} 和圆柱体直径 d 有关

$$n = St \frac{U_{\infty}}{d}$$

其中，无量纲数 St 称为斯特劳哈(V. Strouhal)数。 St 和 Re 有关：根据罗斯柯 (A. Roshko) 1954年的实验结果，当 Re 大于1000时，斯特劳哈数 St 近似地等于常数，即

$$St = 0.21$$

测定卡门涡街脱落频率的方法有**热敏电阻丝法**、**超音波束法**等，根据卡门涡街的上述性质，可以制成卡门涡街流量计。

本节课我们讲解和学习了如下内容：

1. 边界层的概念及特征

- 边界层的概念及特征
- 普朗特边界层微分方程

2. 绕平板流动的近似计算

- 平板的层流边界层近似计算
- 平板的湍流边界层近似计算
- 平板的混合边界层近似计算

3. 绕曲面流动及边界层的分离

- 边界层分离现象及其成因

8-3、8-6、8-10、8-16



Thanks!

欢迎提问 敬请指导



孙东科

微信: DongkeSun

电邮: dk.sun@seu.edu.cn

手机: 18651683583