

流体力学 · 理想可压缩流体流动与激波

FLUID DYNAMICS · INVISCID COMPRESSIBLE FLOWS AND SHOCK WAVES

Dongke Sun (孙东科)

dk.sun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院
School of Mechanical Engineering
Southeast University

Inviscid Compressible Flows & Shock Waves

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

Inviscid Compressible Flows & Shock Waves

$$\mathcal{A} \mathcal{F} \mathcal{M}$$
$$\alpha \delta \gamma \phi \mu \nu \theta$$





理想可压缩流体的流动

可压缩流动

$$\frac{D\rho}{Dt} \neq 0, \quad \rho \neq \text{const}$$

- 形成流体力学的一个分支 《空气动力学》 《气体动力学》
- ▶ $Ma < 1$ $\Rightarrow$ 亚音速流动
- ▶ $Ma > 1$ $\Rightarrow$ 超音速流动
- ▶ $Ma = 1$ $\Rightarrow$ 音速流动
- ▶ $Ma > 5$ $\Rightarrow$ 高超音速流动

理想可压缩流体的流动

可压缩流动

$$\frac{D\rho}{Dt} \neq 0, \quad \rho \neq \text{const}$$

■ 形成流体力学的一个分支

《空气动力学》 《气体动力学》

▶ $Ma < 1$ $\Rightarrow$ 亚音速流动

▶ $Ma > 1$ $\Rightarrow$ 超音速流动

▶ $Ma = 1$ $\Rightarrow$ 音速流动

▶ $Ma > 5$ $\Rightarrow$ 高超音速流动

▶ 跨音速流动:

流速在音速附近, 流场内亚音速流和超音速流并存的流动。

理想可压缩流体的流动

可压缩流动

$$\frac{D\rho}{Dt} \neq 0, \quad \rho \neq \text{const}$$

■ 形成流体力学的一个分支

《空气动力学》 《气体动力学》

▶ $Ma < 1$ $\Rightarrow$ 亚音速流动

▶ $Ma > 1$ $\Rightarrow$ 超音速流动

▶ $Ma = 1$ $\Rightarrow$ 音速流动

▶ $Ma > 5$ $\Rightarrow$ 高超音速流动

▶ 跨音速流动:

流速在音速附近, 流场内亚音速流和超音速流并存的流动。

$$Ma \rightarrow Ma$$

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

流体的热力学性质——状态方程

对于只含一种组分的简单系统, 只需给定两个相互独立的状态参数就可以完全确定它的状态

$$p = p(\rho, T), \quad e = e(\rho, T)$$

单组分系统可压缩流动, 可以用完全气体状态方程

$$p = \rho RT, \quad R = \frac{\lambda}{M}$$

式中, R 是气体常数, λ 普适气体常数, M 气体的相对分子质量。

普适气体常数 $\lambda = 8314 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ 。对于空气, 可取 $M = 28.97$, 则

$$R = 8314/28.97 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) = 286.99 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$$

流体的热力学性质——焓与比热容

定义热力学状态参数——焓（比焓），

$$h := e + \frac{p}{\rho} = e + pv \quad \leftarrow \quad v: \text{比容, 单位质量流体的体积}$$

由焓和内能可以定义定压比热容和定容比热容, 有

- 定压比热容 $c_p = (\partial h / \partial T)_p$
- 定容比热容 $c_V = (\partial e / \partial T)_V$

流体的热力学性质——焓与比热容

定义热力学状态参数——焓（比焓），

$$h := e + \frac{p}{\rho} = e + pv \quad \leftarrow \quad v: \text{比容, 单位质量流体的体积}$$

由焓和内能可以定义定压比热容和定容比热容, 有

- 定压比热容 $c_p = (\partial h / \partial T)_p$
- 定容比热容 $c_V = (\partial e / \partial T)_V$

对于完全气体, $h = h(T), \quad e = e(T)$

它们与焓和内能的关系可写为

$$dh = c_p dT, \quad de = c_V dT$$

考虑到 $p = \rho RT \Rightarrow h = e + RT$, 两侧取微分, 得

$$dh = de + R dT$$

流体的热力学性质——焓与比热容

将 $dh = c_p dT$, $de = c_V dT$ 代入 $dh = de + R dT$ 可得

$$c_p dT = c_V dT + R dT \Rightarrow c_p - c_V = R$$

这表明，完全气体比定压热容与比定容热容随温度的变化率相同。

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

称为比热容比。

流体的热力学性质——焓与比热容

将 $dh = c_p dT$, $de = c_V dT$ 代入 $dh = de + R dT$ 可得

$$c_p dT = c_V dT + R dT \quad \Rightarrow \quad c_p - c_V = R$$

这表明，完全气体比定压热容与比定容热容随温度的变化率相同。

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V}$$

称为比热容比。比定容热容和比定压热容又可分别表示为

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

对于空气, 通常取 $\gamma = 1.4$ 。于是

$$c_V = 717 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \cdot \text{K}), \quad c_p = 1004 \text{ m}^2 / (\text{s}^2 \cdot \text{K})$$

流体的热力学性质—— Tds 关系式

对于可逆过程 $dS = \frac{\delta Q}{T}$, 那么计算熵增的关系式可表示为

$$Tds = dq$$

依据热力学第一定理, $de = dq - pdv$ 。于是

$$Tds = de + pdv$$

把 $dh = d(e + pv) = de + pdv + vdp$ 代入上式, 可得

流体的热力学性质—— Tds 关系式

对于可逆过程 $dS = \frac{\delta Q}{T}$, 那么计算熵增的关系式可表示为

$$Tds = dq$$

依据热力学第一定理, $de = dq - pdv$ 。于是

$$Tds = de + pdv$$

把 $dh = d(e + pv) = de + pdv + vdp$ 代入上式, 可得

$$Tds = dh - vdp \xrightarrow[\rho v=1]{\text{单位质量}} Tds = dh - \frac{1}{\rho} dp \Rightarrow dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp$$

- 这两个计算熵增的关系式可以应用于不可逆过程。这因为
- 它们是热力学状态参数之间的关系式, 对任何过程都成立。

流体的热力学性质——焓与比热容

对 $Tds = de + pdv$ 两侧同除以 T , 并注意到 $v = 1/\rho$, 有

$$\begin{array}{l} p = \rho RT \\ de = c_V dT \end{array} \Rightarrow ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_V \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\xrightarrow{\text{积分上式}} s_2 - s_1 = c_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

$$\xrightarrow{c_p - c_V = R} s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

对于等熵过程 $s_1 = s_2$, 则由上两式可得

流体的热力学性质——焓与比热容

对 $Tds = de + pdv$ 两侧同除以 T , 并注意到 $v = 1/\rho$, 有

$$\begin{aligned} p &= \rho RT \\ de &= c_V dT \end{aligned} \Rightarrow ds = \frac{de}{T} + \frac{p}{T} d\left(\frac{1}{\rho}\right) = c_V \frac{dT}{T} - R \frac{d\rho}{\rho}$$

$$\xrightarrow{\text{积分上式}} s_2 - s_1 = c_V \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)$$

$$\xrightarrow{c_p - c_V = R} s_2 - s_1 = c_p \ln \left(\frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left(\frac{p_2}{p_1} \right)$$

对于等熵过程 $s_1 = s_2$, 则由上两式可得

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^\gamma = \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \xrightarrow[\text{且待稍后介绍}]{\text{声速 } a = \sqrt{\left(\frac{p}{\rho}\right)_s}} \frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{2\gamma/(\gamma-1)}$$

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程**
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

理想可压缩流动的控制方程

控制方程（忽略质量力）

边界条件（忽略质量力）

理想可压缩流动的控制方程

控制方程（忽略质量力）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho (\mathbf{u} \cdot \nabla) e = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

$$p = p(\rho, T) \quad e = e(\rho, T)$$

► 未知量 $\Rightarrow \mathbf{u}, p, \rho, e, T$

边界条件（忽略质量力）

理想可压缩流动的控制方程

控制方程（忽略质量力）

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) e = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (k \nabla T)$$

$$p = p(\rho, T) \quad e = e(\rho, T)$$

► 未知量 $\Rightarrow \mathbf{u}, p, \rho, e, T$

边界条件（忽略质量力）

► 速度边界条件 $\Rightarrow$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$$

► 温度边界条件 $\Rightarrow$

$$T_1 = T_2$$

► 热流密度条件 $\Rightarrow$

$$\left(k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_1 = \left(k \frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} \right)_2$$

等熵流动——热力学过程等熵关系式

由能量方程 $\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)e = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + \nabla(k \nabla T)$ 忽略导热影响可得

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

对于完全气体, 有状态方程 $p = \rho R T$ 。那么

$$\frac{De}{Dt} = \frac{de}{dT} \frac{DT}{Dt} = c_V \frac{DT}{Dt} = c_V \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho R} \right) \Rightarrow \rho c_V \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho R} \right) = -p \nabla \cdot \mathbf{u}$$

由连续方程 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$, 可得

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \rho c_V \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho R} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

等熵流动——热力学过程等熵关系式

把方程 $\rho c_V \frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho R} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$ 左边的**求导展开**，得

$$\frac{\rho c_V}{R} \left(\frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{c_V}{R} \frac{Dp}{Dt} - \frac{c_V p}{R\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{R}{\rho c_V} \frac{D\rho}{Dt} \Rightarrow \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} = \left(1 + \frac{R}{c_V} \right) \frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} \frac{Dp}{Dt} = \frac{\gamma}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \quad \text{with} \quad \gamma = 1 + \frac{R}{c_V} = \frac{c_p}{c_V}, \quad R = c_p - c_V.$$

于是 $\frac{D}{Dt}(\ln p) = \frac{D}{Dt}(\ln \rho^\gamma) \Rightarrow \frac{D}{Dt} \left(\ln \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \Rightarrow \frac{p}{\rho^\gamma} = C$

等熵流动——热力学过程等熵关系式

▶ $\frac{p}{\rho^\gamma} = C \Rightarrow$ 热力学过程等熵关系式
定常流动时沿流线保持不变

适用条件

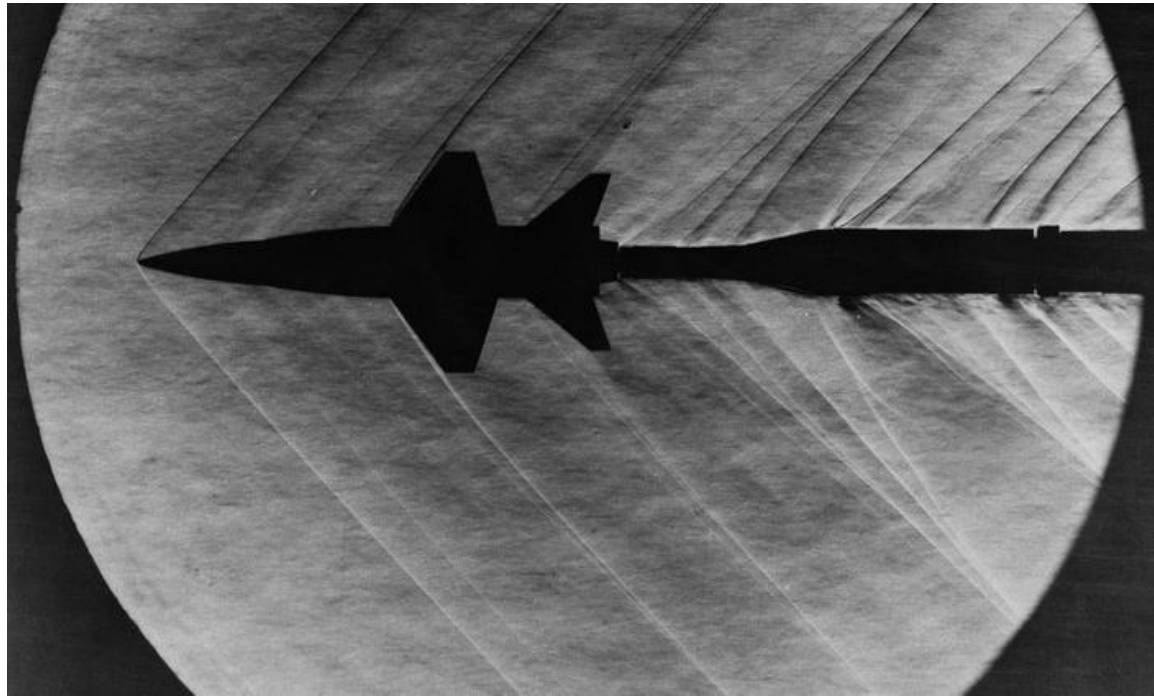
- ① 定常流动
- ② 理想流体（无不可逆损失）
- ③ 无导热（绝热）
- ④ 沿流线，沿流线熵为常数

$$\Delta s = c_V \ln \frac{T}{T_0} + R \ln \frac{\rho}{\rho_0} = 0$$

$$\Delta s = c_p \ln \frac{T}{T_0} - R \ln \frac{p}{p_0} = 0$$

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动



1962年3月23日，美国宇航局在测试跨音速风洞中的X-15模型冲击波

小扰动传播的控制方程

考虑一维小扰动或平面小扰动在静止的完全气体中的传播。

假设扰动传播速度足够大, 流动中导热可以忽略, 即流动过程绝热

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u) = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

对于等熵流动, p/ρ^γ 沿流动方向为常数, 即 $p = p(\rho)$ 。于是, 动量方程中的压强梯度项可表示为

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x}$$

小扰动传播的控制方程

动量方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0$$

连续方程可展开为

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

通过后流场的瞬时变量可表示为上述常数量与扰动量之和的形式, 即

$$p = p_0 + p', \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad u = u_0 + u'$$

上式中 $\rho'/\rho_0, p'/p_0$ 以及 u' 都是小量。

将上述各式代入连续方程和动量方程, 可得新的形式。

小扰动传播的控制方程

连续方程和动量方程的新形式（含小量形式）

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho_0 + \rho} \right) \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

忽略高阶小量，即扰动量的乘积项，上两方程可简化为线性形式

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

式中 $\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0$ 表示 $\frac{dp}{d\rho}$ 作泰勒级数展开后的第一项，下标“0”表示 $\frac{dp}{d\rho}$ 在未受扰动的气体即**静止气体**中的取值。

小扰动传播的控制方程——波动方程

连续方程和动量方程的新形式（含小量形式）

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u' \frac{\partial \rho'}{\partial x} + (\rho_0 + \rho') \frac{\partial u'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + \left(\frac{1}{\rho_0 + \rho} \right) \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho'}{\partial x} = 0$$

上述第一个方程对 t 求偏导, 第二个方程对 x 求偏导, 则可消去 u'

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x \partial t} = - \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0$$

采用同样的方法消去 ρ' , 则速度扰动量 u' 满足的方程为

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0$$

小扰动传播的控制方程——波动方程

整理可得一维的波动方程

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial^2 \rho'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = 0$$

上述方程有着相同形式的解。密度扰动 ρ' 的解可写为

$$\rho' = f \left(x - \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right) + g \left(x + \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right)$$

式中, f 和 g 是任意形式的可微函数。这两个函数的具体形式由初始条件和边界条件确定。

注意: 将上式代入密度波动方程即可验证上式正是波动方程的解。

小扰动传播的控制方程——函数 f 的物理意义

波动方程的解

$$\rho' = f \left(x - \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right) + g \left(x + \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right)$$

令

$$\rho' = f \left(x - \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right)$$

上式表示一个扰动（或一个波）。

在 $x - t$ 平面上，初始扰动波形为 $\rho' = f(x)$ 。

在 t 时刻，波形状不变，但波上所有点都向右移动了 $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t$ 的距离。

小扰动传播的控制方程——函数 f 的物理意义

波动方程的解

$$\rho' = f \left(x - \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right) + g \left(x + \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right)$$

于是，波上每一点（波本身）的传播速度都是 $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0}$ 。

- 因此， $f \left(x - \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right)$ 代表以速度 $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0}$ 沿 x 轴正方向传播的波，称右行波。
- 同样， $g \left(x + \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0} t \right)$ 代表以速度 $\sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho} \right)_0}$ 沿 x 轴负方向移动的波，称左行波。

小扰动传播的控制方程——音速

用 a_0 表示小扰动在未受扰动时静止气体中的运动速度

$$a_0 = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0}$$

无论是 ρ' 还是 u' ，其在静止气体中的传播速度都等于 a_0 （音速）。

- 在小扰动的前提下，上式对运动气体而言也仍然成立。
- 去掉下标后，可把 a 理解为小扰动相对于运动气体的局部音速：

$$a = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_s}$$

下标 “ s ” 表示求导在等熵条件下进行，因为小扰动传播过程等熵。

小扰动传播的控制方程——音速

对于等熵过程，有

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = C \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad \Rightarrow \quad \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho}$$

由完全气体状态方程 $p = \rho RT$ ，上式又可写为

$$\frac{dp}{d\rho} = \gamma RT \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

► 由此可见，小扰动在气体中的传播速度

- ① 一方面取决于气体的物理性质，体现在不同的气体常数 γ 中，
- ② 另一方面也取决于当地绝对温度 T 。

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动**
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

一维定常等熵流动

对于一维定常等熵流动，热力学变量如温度、压强和密度等与马赫数之间存在简单而有用的关系式。

接下来，将从**能量方程**出发推导这些关系式。

等熵流动

流体系统每一部分的熵在运动过程中都保持不变的一种流动。

等熵流动要求每个流体质点的熵在流动过程中保持不变，即

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla S = 0$$

可逆的绝热流动都是等熵流动，不可逆的绝热流动则不等熵，即（由热力学第二定律可知）熵总是增加 $dS/dt > 0$ 。

一维定常等熵流动 · 等熵流动

用熵表示的能量方程为

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$

因此，要保持 $dS/dt = 0$ 必须使热传导项与黏性耗损项 Φ 正好抵消，这在实际上是很难实现的。故而有时间把等熵流动和可逆的绝热流动看成是等同的。从能量方程可看出，忽略黏性和热传导的流体连续运动一定也是等熵流动。

一维定常等熵流动 · 等熵流动

用熵表示的能量方程为

$$\rho T \frac{dS}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$

因此，要保持 $dS/dt = 0$ 必须使热传导项与黏性耗损项 Φ 正好抵消，这在实际上是很难实现的。故而有时间把等熵流动和可逆的绝热流动看成是等同的。从能量方程可看出，忽略黏性和热传导的流体连续运动一定也是等熵流动。

由 $h = e + \frac{p}{\rho} \Rightarrow T \frac{Ds}{Dt} = \frac{Dh}{Dt} - \frac{1}{\rho} \frac{Dp}{Dt}$ ，可得以焓表示的能量方程

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi \Rightarrow$$

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p + \nabla \cdot (k \nabla T) + \Phi$$

一维定常等熵流动

当忽略导热影响时，以焓表示的能量方程可简化为

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p$$

动量方程 $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p$ 两侧同时点乘速度矢量 $\mathbf{u}$, 则

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p \xrightarrow{\text{上两式相加}} \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

对于定常流动,

一维定常等熵流动

当忽略导热影响时，以焓表示的能量方程可简化为

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p$$

动量方程 $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p$ 两侧同时点乘速度矢量 $\mathbf{u}$, 则

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p \xrightarrow{\text{上两式相加}} \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

对于定常流动, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ 。于是

一维定常等熵流动

当忽略导热影响时，以焓表示的能量方程可简化为

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla p$$

动量方程 $\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = -\nabla p$ 两侧同时点乘速度矢量 $\mathbf{u}$, 则

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = -\mathbf{u} \cdot \nabla p \xrightarrow{\text{上两式相加}} \rho \frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = \frac{\partial p}{\partial t}$$

对于定常流动, $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ 。于是

$$\frac{D}{Dt} \left(h + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h + \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = C$$

一维定常等熵流动

▶ $h + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = C \Rightarrow$ 定常流动的动能和焓的总和沿流线为常数。

当动能减少时, 流体的焓必然增加。速度为零时的焓称为滞止焓 h_0 。

于是, $h + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = C$ 可表示为 $h + \frac{1}{2}\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = h_0$

对于完全气体 $h = c_p T$, 在一维流动时 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = u^2$, 那么上式可写为

$$h + \frac{1}{2}u^2 = h_0, \quad c_p T + \frac{1}{2}u^2 = c_p T_0$$

式中 T_0 是滞止温度, 即流体速度沿着流线等熵滞止为零时的温度。

一维定常等熵流动

将上述能量方程中的温度表示为无量纲形式, $\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{u^2}{2c_p T}$, 考虑到

$$\frac{u^2}{T} = \frac{\gamma R u^2}{\gamma R T} = \frac{\gamma R u^2}{a^2} = \gamma R M_a^2, \quad \frac{R}{c_p} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \Rightarrow \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2\right)^{-1}$$

由等熵关系式

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma = \left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \left(\frac{a}{a_0}\right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}$$

可得压强与密度的无量纲表达式

$$\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2\right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2\right)^{-\frac{1}{\gamma-1}}$$

对于确定的一元定常等熵流动, **滞止**参考量 h_0, T_0, p_0, ρ_0 均为常数。

一维定常等熵流动 · 能量方程

将方程 $p = \rho RT$ 、 $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V} = \frac{c_p}{c_V}$ 、 $R = c_p - c_V$ 代入能量方程

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 = h_0$$

可得

一维定常等熵流动 · 能量方程

将方程 $p = \rho RT$ 、 $\gamma = 1 + \frac{R}{c_V} = \frac{c_p}{c_V}$ 、 $R = c_p - c_V$ 代入能量方程

$$c_p T + \frac{1}{2} u^2 = h_0$$

可得

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const} \Rightarrow \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

等号左边第一项为单位质量气体的内能, 即 $e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$.

一维定常等熵流动的能量方程的物理意义: 在一维定常等熵流动中, 流动通道任一截面上单位质量气体的内能、压强势能、动能之和保持为常数。

一维定常等熵流动 · 能量方程

- ▶ 考虑气体音速表达式 $a = \sqrt{\gamma RT}$, 能量方程又可写为

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = \text{const}$$

- ▶ 对于完全气体, 气流动能与内能之比为

$$\frac{\frac{u^2}{2}}{e} = \frac{\frac{u^2}{2}}{\frac{RT}{\gamma - 1}} = \frac{\gamma(\gamma - 1)u^2}{2a^2} = \frac{\gamma(\gamma - 1)}{2} M_a^2$$

由此可见, 气体宏观流动动能与气体分子热运动内能之比与马赫数的平方成正比。

一维定常等熵流动 · 三种特定状态

能量方程：一般形式

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = h_0$$

能量方程：音速形式

$$\frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{u^2}{2} = h_0$$

一维定常等熵流动 · 三种特定状态

(1) 滞止状态: 气体动能全部转化为热能

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{a_0^2}{\gamma-1} = h_0$$

(2) 最大速度状态: 压强降低到零、温度降低到零, 速度达最大值

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = \frac{u_{\max}^2}{2} \quad \leftarrow \quad \text{实际不可达到, 仅具有理论意义}$$

(3) 临界状态: 气体的流速等于当地音速

$$\frac{a^2}{\gamma-1} + \frac{u^2}{2} = \frac{a^{*2}}{\gamma-1} + \frac{a^{*2}}{2} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \frac{a^{*2}}{2} \quad \leftarrow \quad \text{以临界音速的形式表示气体的总能量}$$

一维定常等熵流动 · 例题

例：已知空气流速 120 m/s , 温度 20°C , 用毕托管测速时如把气体看作不可压缩流体, 求计算流速与实际流速之比。

一维定常等熵流动 · 例题

例：已知空气流速 120 m/s , 温度 20°C , 用毕托管测速时如把气体看作不可压缩流体, 求计算流速与实际流速之比。

解：如果认为流体是不可压缩流体, 则由不可压缩流体伯努利方程, 可得滞止压强表达式

$$p_0 = p + \frac{1}{2}\rho u^2$$

用毕托管测得 p_0 和 p , 则计算流速为

$$u_{\text{calc}} = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}$$

一维定常等熵流动 · 例题

由式 $\frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2\right)^{-\gamma/(\gamma-1)}$ 可得考虑可压缩性时的滞止压强

$$p_0 = p \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

当 $\frac{\gamma-1}{2} M_a^2 < 1$ (即马赫数较低) 时上式可展开为 (Taylor级数:
 $(1+x)^\alpha = 1|_{x=0} + \alpha(1+x|_{x=0})^{\alpha-1}x + \frac{1}{2!}\alpha(\alpha-1)(1+x|_{x=0})^{\alpha-2}x^2 + \dots$)

$$\begin{aligned} p_0 &= p \left[1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma-1}{2} M_a^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \right) \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1 \right) \left(\frac{\gamma-1}{2} \right)^2 M_a^4 + \dots \right] \\ &= p \left[1 + \frac{\gamma}{2} M_a^2 + \frac{\gamma}{8} M_a^4 + \dots \right] = p \left[1 + \frac{\gamma}{2} M_a^2 \left(1 + \frac{1}{4} M_a^2 + \dots \right) \right] \end{aligned}$$

一维定常等熵流动 · 例题

考虑到 $\gamma M_a^2 = \gamma \frac{u^2}{a^2} = \gamma \frac{u^2}{\gamma p / \rho} = \frac{\rho}{p} u^2$, 并令 $\varepsilon = \frac{1}{4} M_a^2 + \dots$, 上式可写为

$$p_0 = p + \frac{1}{2} \rho u^2 (1 + \varepsilon) \Rightarrow u = \sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{(1 + \varepsilon)\rho}} \Rightarrow \frac{u_{\text{calc}}}{u} = \frac{\sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{\rho}}}{\sqrt{\frac{2(p_0 - p)}{(1 + \varepsilon)\rho}}} = \sqrt{1 + \varepsilon}$$

题目给出的气流马赫数为

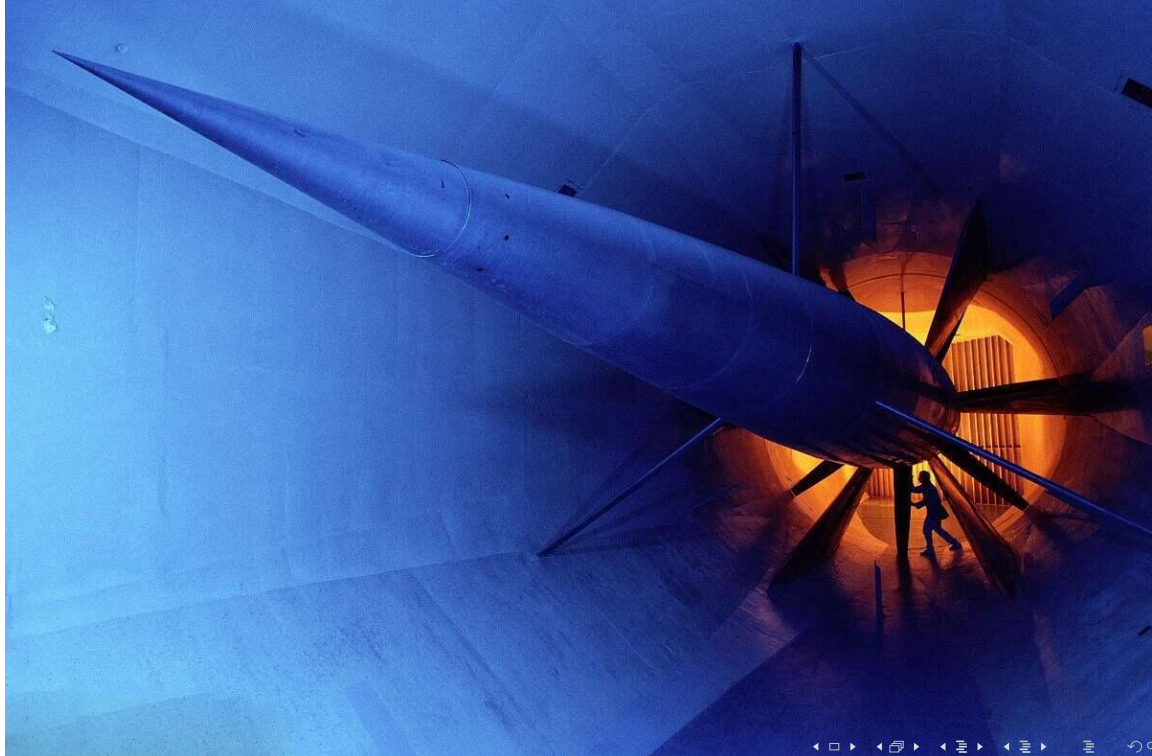
$$M_a = \frac{u}{\sqrt{\gamma R T}} = \frac{120}{\sqrt{1.4 \times 287 \times (273 + 20)}} \approx 0.350$$

$$\Rightarrow \varepsilon \approx \frac{1}{4} M_a^2 = \frac{1}{4} \times 0.350^2 = 0.0305 \Rightarrow \frac{u_{\text{calc}}}{u} = \sqrt{1 + 0.0305} \approx 1.015$$

► 通常在工程计算中, 当 $M > 0.3$ 时就应当考虑压缩性的影响。

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动**
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动



喷管中的等熵流动——气流参数与截面的关系

■ 气体在管道中的速度与管道截面大小的关系

由运动方程可得

$$VdV = -\frac{dp}{\rho} = -\frac{dp}{d\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -a^2 \frac{d\rho}{\rho} \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V}{a^2} dV = -M_a^2 \frac{dV}{V}$$

代入连续性方程 $\rho AV = C$, 可得截面积变化率与速度变化率关系

$$\frac{dA}{A} = (M_a^2 - 1) \frac{dV}{V}$$

对一维定常欧拉运动微分方程 $VdV = -\frac{1}{\rho} dp$ 两边同除以 V^2 , 有

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dp}{\rho M_a^2 a^2} = -\frac{1}{M_a^2} \frac{dp}{\rho \gamma p / \rho} = -\frac{1}{\gamma M_a^2} \frac{dp}{p}$$

喷管中的等熵流动——气流参数与截面的关系

由上述两式可得**截面积变化率**与**压强变化率**关系

$$\frac{dA}{A} = \frac{1 - M_a^2}{\gamma M_a^2} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dV}{V} = -\frac{1}{\gamma M_a^2} \frac{dp}{p}, \quad \frac{dV}{V} = \frac{1}{M_a^2 - 1} \frac{dA}{A}$$

根据 M_a 的大小, 上述公式

- ① 亚音速流动 ($M_a < 1$), 当压强降低时, 气流截面积减小 $\Rightarrow$ 流速增加, 由此条件可得到亚音速喷管。
- ② 超音速流动 ($M_a > 1$), 当压强降低时, 气流截面积增大 $\Rightarrow$ 流速增加, 由此条件可得到超音速喷管。
- ③ 音速流动 ($M_a = 1$), 此时 $dA = 0$, 说明音速流动只发生在管道的等截面部分。最小截面称为临界截面, 也称为“喉部”。

喷管中的等熵流动——气流参数与截面的关系

临界截面气流参数与滞止参数的关系

$$T^* = \frac{2}{\gamma + 1} T_0, \quad p^* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} p_0, \quad \rho^* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \rho_0$$

喷管中的等熵流动——气流参数与截面的关系

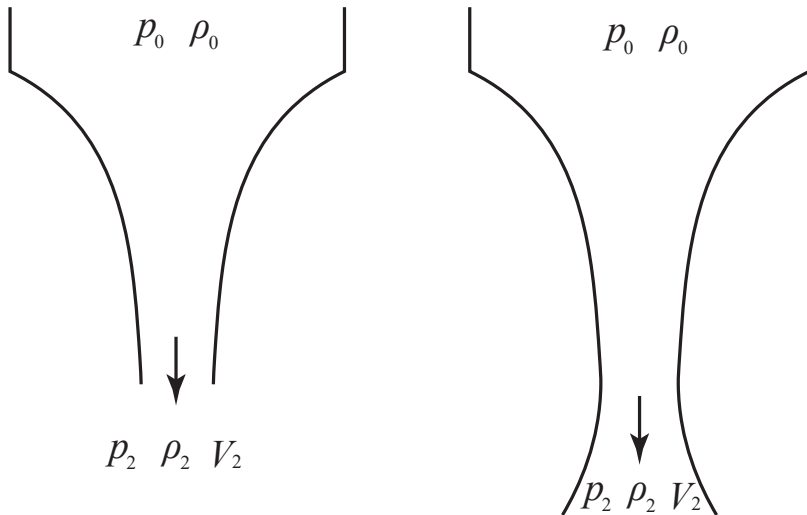
临界截面气流参数与滞止参数的关系

$$T^* = \frac{2}{\gamma + 1} T_0, \quad p^* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} p_0, \quad \rho^* = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \rho_0$$

表: 三种 M_a 条件下截面积变化对流动速度的影响规律

来流状况	马赫数	渐缩管中速度变化趋势 $dA < 0$	等截面管中速度变化趋势 $dA = 0$	渐扩管中速度变化趋势 $dA > 0$
亚音速	$M_a < 1$	加速流动	匀速流动	减速流动
音速	$M_a = 1$	来流不可能音速	匀速流动	来流不可能音速
超音速	$M_a > 1$	减速流动	匀速流动	加速流动

喷管中的等熵流动——喷管



喷管中的等熵流动——渐缩喷管

由能量方程得

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}$$

因 流动过程等熵 $\Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_2} = \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$

则喷管出口速度为

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

喷管中的等熵流动——渐缩喷管

由能量方程得

$$\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{V_2^2}{2}$$

则喷管出口速度为

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

因 流动过程等熵 $\Rightarrow \frac{\rho_0}{\rho_2} = \left(\frac{p_0}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$\Rightarrow$ 喷管质量流量 $Q_M = \rho_2 A_2 V_2 = \rho_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$

$$= \rho_0 A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{2}{\gamma}} - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} \right]}$$

喷管中的等熵流动——渐缩喷管

当达到最大流量时的 p_2 ，可由 $dQ_M/dp_2 = 0$ 得到

$$p_2 = p^* = p_0 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma - 1}} \quad \Leftarrow \quad \text{此时 } p_2 \text{ 记为 } p^*$$

当出口截面上压强为临界压强时，流量达最大、**出口速度为音速**

$$V_2 = a^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma + 1} p_0} \quad \Leftarrow \quad \text{此时 } V_2 \text{ 记为 } a^*$$

⇒ **最大流量**
或
临界流量

$$\begin{aligned} Q_M^* &= \rho_0 A_2 \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{2}{\gamma - 1}} - \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}} \right]} \\ &= A_2 \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma - 2}} \sqrt{\gamma p_0 \rho_0} \end{aligned}$$

喷管中的等熵流动——缩放喷管

喷管任意截面上的质量流量可写成

$$Q_M = \rho AV = \rho A M_a \sqrt{\gamma RT}$$

临界流量 $Q_M^* = \rho^* A^* \sqrt{\gamma RT^*}$ 和流量比 $\frac{Q_M}{Q_M^*} = \frac{\rho A}{\rho^* A^*} \sqrt{\frac{T}{T^*}} M_a = 1$

代入临界参数公式

$$\frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{-\frac{1}{\gamma-1}} \frac{A}{A^*} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2} \frac{T}{T_0}} M_a = 1$$

代入密度比、温度比公式, 得面积比与马赫数关系

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M_a} \left[\frac{2 + (\gamma - 1) M_a^2}{\gamma + 1} \right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

喷管中的等熵流动——缩放喷管

例: 已知喷管入口处过热蒸汽的滞止参数为 $p_0 = 30 \times 10^5 \text{Pa}$, $t_0 = 500^\circ\text{C}$, 质量流量为 $Q_M = 8.5 \text{ kg/s}$, 出口压强为 $p_2 = 10 \times 10^5 \text{Pa}$ 。过热蒸汽的气体常数为 $R = 462 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $p^*/p_0 = 0.546$, $\gamma = 1.30$ 。设喷管内为等熵流动, 请确定喷管的直径。

喷管中的等熵流动——缩放喷管

例: 已知喷管入口处过热蒸汽的滞止参数为 $p_0 = 30 \times 10^5 \text{Pa}$, $t_0 = 500^\circ\text{C}$, 质量流量为 $Q_M = 8.5 \text{ kg/s}$, 出口压强为 $p_2 = 10 \times 10^5 \text{Pa}$ 。过热蒸汽的气体常数为 $R = 462 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$, $p^*/p_0 = 0.546$, $\gamma = 1.30$ 。设喷管内为等熵流动, 请确定喷管的直径。

解: 压强比为

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{1}{3} < 0.546 = \frac{p^*}{p_0}$$

说明在喉部已达临界状态, 需采用缩放喷管。

$$\rho_0 = \frac{p_0}{RT_0} = \frac{30 \times 10^5}{462 \times (500 + 273)} \text{ kg/m}^3 = 8.40 \text{ kg/m}^3$$

喷管中的等熵流动——缩放喷管

出口速度为

$$V_2 = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} = 833 \text{m/s}$$

喉部临界速度为

$$V^* = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma+1} \frac{p_0}{\rho_0}} = 635 \text{m/s}$$

喉部截面积为

$$A^* = \frac{Q_M}{\rho^* V^*} = \frac{Q_M}{\left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \rho_0 V^*} = 0.00254 \text{m}^2$$

出口截面积为

$$A_2 = \frac{Q_M}{\rho_2 V_2} = \frac{Q_M}{\rho_0 \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_2} = 0.00283 \text{m}^2$$

喉部直径为 $d^* = \sqrt{\frac{4A^*}{\pi}} = 0.0569 \text{m}$

出口直径为 $d_2 = \sqrt{\frac{4A_2}{\pi}} = 0.0600 \text{m}$

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流**
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

有摩擦的绝热管流——运动方程

由动量定量可得

$$VdV + \frac{dp}{\rho} + \frac{4\tau_0 dx}{\rho d} = 0$$

管壁切向应力

$$\left. \begin{aligned} \tau_0 &= \frac{\Delta p}{4l} d \\ \Delta p &= \rho \lambda \frac{l}{d} \frac{V^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \tau_0 = \frac{\lambda}{8} \rho V^2$$

式中, λ 为沿程阻力系数. 于是, 摩擦绝热的气体一维定常运动方程

$$VdV + \frac{dp}{\rho} + \lambda \frac{V^2}{2} \frac{dx}{d} = 0$$

式中第三项的意义为单位质量气体在微小管段 dx 上的摩擦功。

有摩擦的绝热管流——摩擦的影响

能量方程的适用条件为绝热，将 $h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho}$

代入一维定常等熵流动能量方程 $h + \frac{1}{2}V^2 = h_0$

然后取微分可得 $\frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{\rho} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} V dV$

根据连续性方程 $\rho AV = \text{const}$, 有 $\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dA}{A} - \frac{dV}{V}$

消去 $d\rho/\rho$, 可得 $\frac{dp}{\rho} = \left(\frac{V^2}{\gamma} - \frac{p}{\rho} \right) \frac{dV}{V} - \frac{p}{\rho} \frac{dA}{A} - V dV$

有摩擦的绝热管流——摩擦的影响

带入摩擦绝热的气体一维定常运动方程

$$\left(\frac{V^2}{\gamma} - \frac{p}{\rho} \right) \frac{dV}{V} - \frac{p}{\rho} \frac{dA}{A} + \lambda \frac{dx}{d} \frac{V^2}{2} = 0$$

两边同乘以 $\gamma \Rightarrow (V^2 - a^2) \frac{dV}{V} - a^2 \frac{dA}{A} + \gamma \lambda \frac{dx}{d} \frac{V^2}{2} = 0$

或 $(M_a^2 - 1) \frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} - \lambda \frac{\gamma M_a^2}{2} \frac{dx}{d}$

在临界截面上 $M_a = 1$, 故有 $\frac{dA}{A} = \lambda \frac{\gamma}{2} \frac{dx}{d}$

不论来流是否超音速, 气流总在最小截面后的扩张段才能达到音速。

有摩擦的绝热管流——马赫数沿管长的分布

由能量方程得

$$\frac{dV}{V} = -\frac{dh}{V^2} = -\frac{\frac{\gamma}{\gamma-1}RdT}{M_a^2\gamma RT} = -\frac{1}{M_a^2(\gamma-1)}\frac{dT}{T}$$

对 $V^2 = M_a^2\gamma RT$ 求微分 $\Rightarrow 2\frac{dV}{V} = 2\frac{dM_a}{M_a} + \frac{dT}{T}$

合并上述两式, 消去 dT/T , 可得速度与马赫数关系

$$\frac{dV}{V} = \frac{dM_a/M_a}{M_a^2(\gamma-1)/2 + 1}$$

由 $(M_a^2 - 1)\frac{dV}{V} = \frac{dA}{A} - \lambda\frac{\gamma M_a^2}{2}\frac{dx}{d}$ 可知, 对于等截面管道 $dA = 0$, 有

$$(M_a^2 - 1)\frac{dV}{V} = -\lambda\frac{\gamma M_a^2}{2}\frac{dx}{d}$$

有摩擦的绝热管流——马赫数沿管长的分布

合并上述两式, 消去 $dV/V \Rightarrow \lambda \frac{dx}{d} = \frac{2(1 - M_a^2) dM_a}{\gamma M_a^3 (\frac{\gamma-1}{2} M_a^2 + 1)}$

对上式积分可得马赫数沿管长的分布。

积分限: $x = 0, M_a = M_{ai}$; $x = l, M_a = M_{al}$ 。积分后令 $M_{al} = M_a$, 有

$$\lambda \frac{l}{d} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_{ai}^2} - \frac{1}{M_a^2} \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{M_{ai}^2 (\gamma - 1) M_a^2 + 2}{M_a^2 (\gamma - 1) M_{ai}^2 + 2} \right]$$

当 $M_a = 1$ 时, 管道长度达最大值, 有

$$\lambda \frac{l_{\max}}{d} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{1}{M_{ai}^2} - 1 \right) + \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1) M_{ai}^2}{(\gamma - 1) M_{ai}^2 + 2} \right]$$

有摩擦的绝热管流——气流参数沿管长的分布

以马赫数为变量, 绝热流动管内各温度之间的关系

$$T_0 = T_i \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{ai}^2 \right) = T \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2 \right)$$

任意管长处温度与进口温度之比为

$$\frac{T}{T_i} = \frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_{ai}^2}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_a^2}$$

由连续性方程 $\rho V = \text{const} \Rightarrow \rho M_a \sqrt{\gamma R T} = \text{const}$, 有

$$\frac{p_i}{R T_i} M_{ai} \sqrt{\gamma R T_i} = \frac{p}{R T} M_a \sqrt{\gamma R T} \Rightarrow \frac{p}{p_i} = \frac{M_{ai}}{M_a} \frac{\sqrt{\gamma R T_i}}{\sqrt{\gamma R T}}$$

有摩擦的绝热管流——气流参数沿管长的分布

于是，任意管长处压强与进口压强之比为

$$\frac{p}{p_i} = \frac{M_{ai}}{M_a} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ai}^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2}}$$

由完全气体状态方程，可得密度之比为

$$\frac{\rho}{\rho_i} = \frac{M_{ai}}{M_a} \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{ai}^2}}$$

把 $M_a = 1$ 代入上述各关系式，可得**临界截面上的气流状态参数**。

有摩擦的绝热管流——临界截面上的气流状态参数

- ▶ 临界截面上温度与进口温度之比

$\Rightarrow$

$$\frac{T^*}{T_i} = \frac{2 + (\gamma - 1)M_{ai}^2}{\gamma + 1}$$

- ▶ 临界截面上压强与进口压强之比为

$\Rightarrow$

$$\frac{p^*}{p_i} = M_{ai} \sqrt{\frac{2 + (\gamma - 1)M_{ai}^2}{\gamma + 1}}$$

- ▶ 临界截面上密度与进口密度之比为

$\Rightarrow$

$$\frac{\rho^*}{\rho_i} = M_{ai} \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2 + (\gamma - 1)M_{ai}^2}}$$

以上各式中, 比热容比 $\gamma = \frac{c_p}{c_V}$, 比定容热容和比定压热容分别为

$$c_V = \frac{R}{\gamma - 1}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}. \quad \text{对于空气, 通常取 } \gamma = 1.4.$$

有摩擦的绝热管流——气流参数沿管长的分布

例：空气在直径 $d = 0.03\text{m}$ 的圆管中作绝热流动，沿程阻力系数 $\lambda = 0.02$ ，管道进口气流参数为 $M_{ai} = 0.2$ ， $T_i = 280\text{K}$ ， $p_i = 2 \times 10^5\text{Pa}$ ，求气流达到临界状态的最大长度 $l_{\max}$ 及出口处的压强 p^* 与温度 T^* 。

有摩擦的绝热管流——气流参数沿管长的分布

例：空气在直径 $d = 0.03\text{m}$ 的圆管中作绝热流动，沿程阻力系数 $\lambda = 0.02$ ，管道进口气流参数为 $M_{ai} = 0.2$ ， $T_i = 280\text{K}$ ， $p_i = 2 \times 10^5\text{Pa}$ ，求气流达到临界状态的最大长度 $l_{\max}$ 及出口处的压强 p^* 与温度 T^* 。

解：管道进口处气流的速度为

$$V_i = M_{ai} \sqrt{\gamma R T_i} = 67.1\text{m/s}$$

最大长度为

$$l_{\max} = \frac{d}{\lambda \gamma} \left(\frac{1}{M_{ai}^2} - 1 \right) + \frac{d}{\lambda} \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \ln \left[\frac{(\gamma + 1) M_{ai}^2}{(\gamma - 1) M_{ai}^2 + 2} \right] = 21.8\text{m}$$

有摩擦的绝热管流——气流参数沿管长的分布

例：空气在直径 $d = 0.03\text{m}$ 的圆管中作绝热流动，沿程阻力系数 $\lambda = 0.02$ ，管道进口气流参数为 $M_{ai} = 0.2$ ， $T_i = 280\text{K}$ ， $p_i = 2 \times 10^5\text{Pa}$ ，求气流达到临界状态的最大长度 $l_{\max}$ 及出口处的压强 p^* 与温度 T^* 。

解：出口处的压强为

$$p^* = p_i M_{ai} \sqrt{\frac{(\gamma - 1)M_{ai}^2 + 2}{\gamma + 1}} = 3.66 \times 10^4 \text{Pa}$$

出口处的温度为

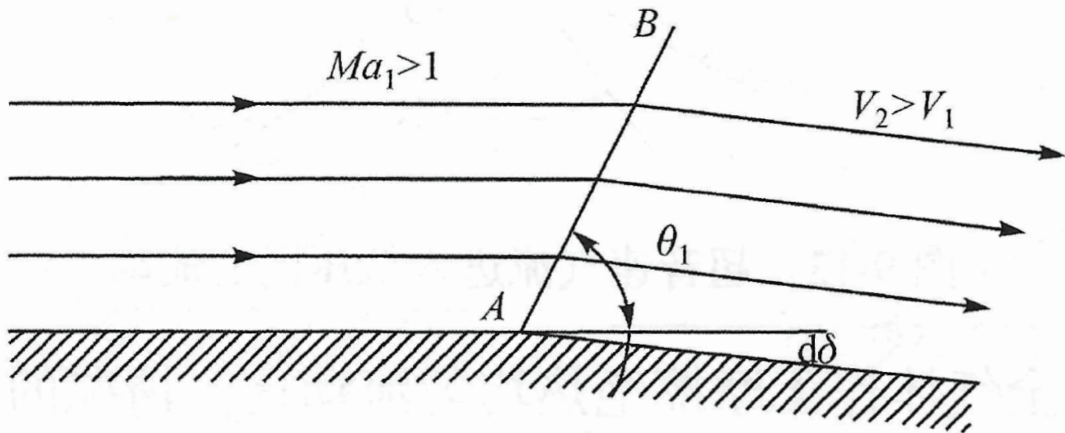
$$T^* = T_i \frac{(\gamma - 1)M_{ai}^2 + 2}{\gamma + 1} = 235\text{K}$$

理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波**
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

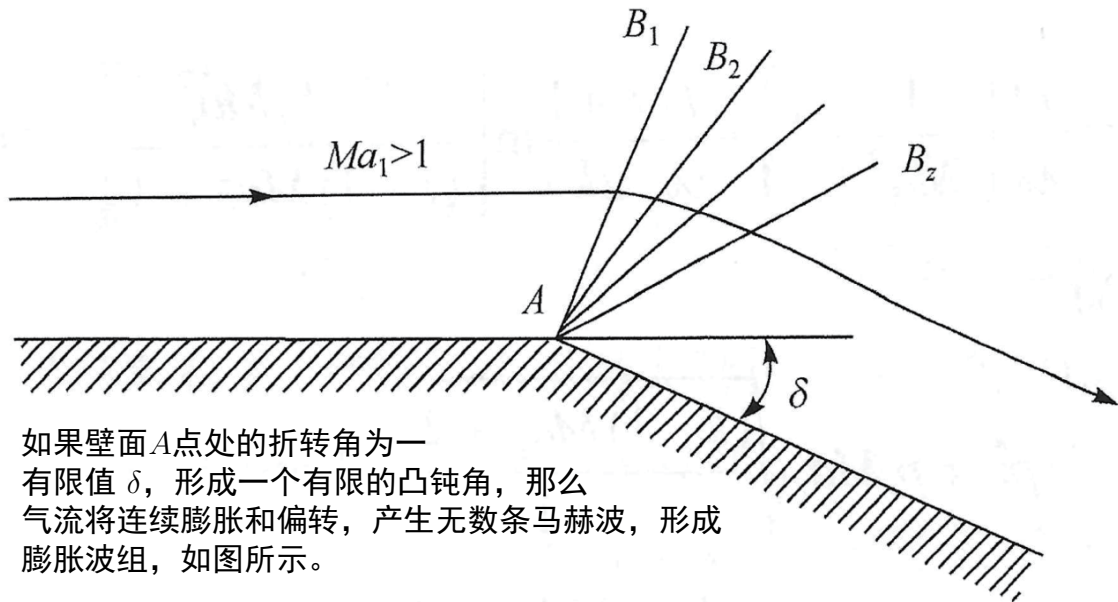
超音速气流绕凸壁面的流动 (膨胀波)

超音速气流在流动过程中遇到扰动点，就会将微小扰动波叠加起来形成马赫波。



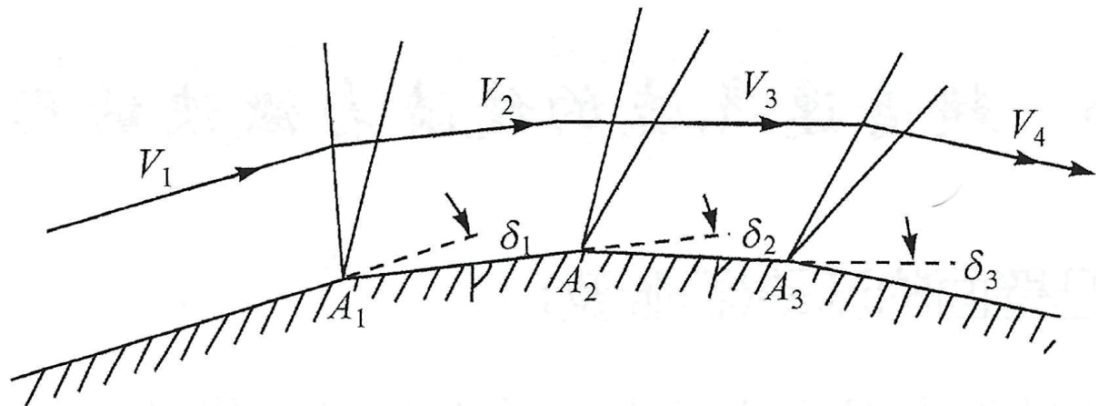
由于气流通道略有增大，气流通过马赫波以后将发生微小的膨胀，速度有微小的增加，压强、密度、温度有微小的降低，这种马赫波也称为微小膨胀波。

超音速气流绕凸钝角的膨胀波组



如果壁面 A 点处的折转角为一有限值 δ ，形成一个有限的凸钝角，那么气流将连续膨胀和偏转，产生无数条马赫波，形成膨胀波组，如图所示。

超音速气流沿多次折转的壁面的流动

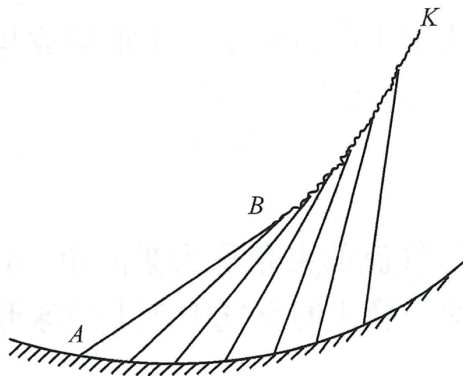


当超音速气流沿着多次向外折转的壁面流动，则在每一个折转角处都要产生一组膨胀波，气流会在每组膨胀波内发生膨胀、加速和偏转，如图所示。

超音速气流绕凹壁面的流动 (激波)

超音速气流绕凹壁面流动时，气流由于通道面积缩小而受到压缩将产生激波。

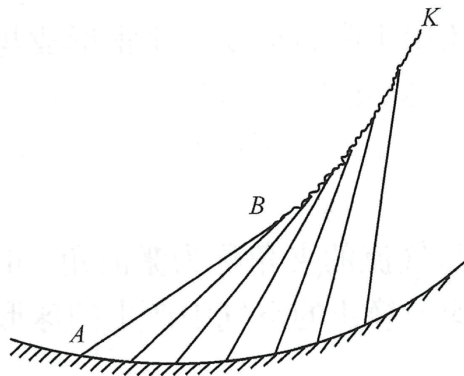
当超音速气流经过凹曲壁时，曲面上的每一点都是扰动源，将产生无数条马赫波，如下图所示。



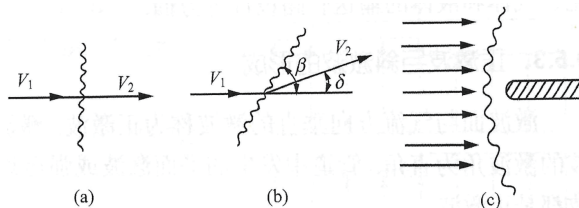
超音速气流绕凹壁面的流动 (激波)

超音速气流绕凹壁面流动时，气流由于通道面积缩小而受到压缩将产生激波。

当超音速气流经过凹曲壁时，表面上的每一点都是扰动源，将产生无数条马赫波，如下图所示。



无数条马赫波将叠加形成一条强压缩波面，气流通过强压缩波后将发生突变。这个突跃面或强间断面被称为激波。

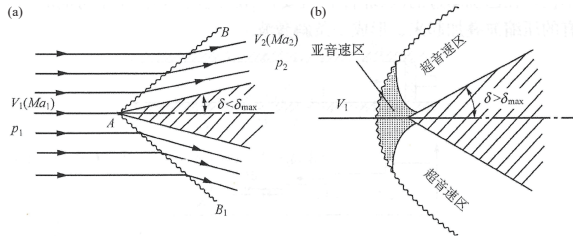
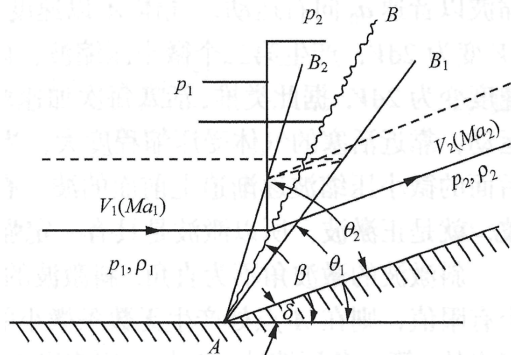


根据激波与气流方向的相对位置，可将激波分为三种：正激波、斜激波和曲线脱体激波，如上图所示

超音速气流绕凹壁面的流动 (激波)

当超音速气流在有限折转角 δ 的凹壁中流动时, 便产生一条斜激波 AB , 如右图所示。

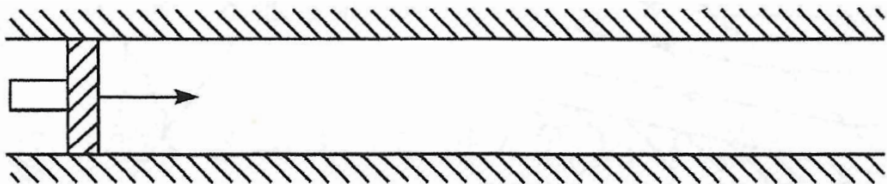
激波与来流方向的夹角 β 称为激波角。



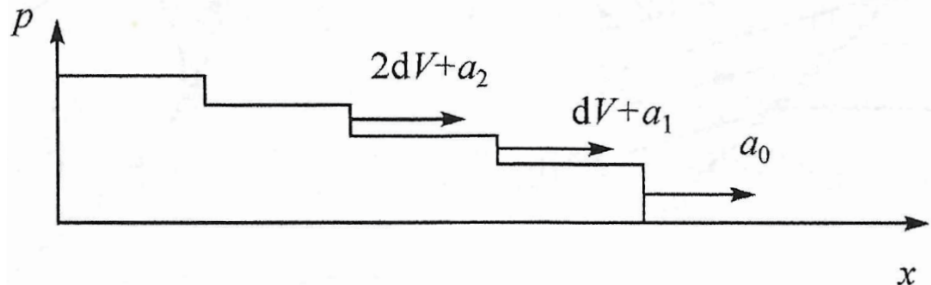
当超音速气流流经有双倍折转角 2δ 的楔形物体时, 在其尖端处产生两条斜激波, 如图(a)所示。随着折转角的增大, 楔形物体的尖头变为钝头, 斜激波就变为一条脱离钝头物体的曲线脱体激波, 如图(b)所示。

正激波与斜激波的形成

激波面与气流方向垂直的激波称为正激波。激波面与气流的夹角称为激波角。



正激波的激波角为直角，管道中发生的平面激波或强爆炸产生的球形激波都是正激波。



理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系**
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

激波前后气体参数的关系

正激波在直管道中的前进是一个不定常的流动。设正激波的运动速度为常数，就可以将坐标系固定在激波面上，气流则是以相反的速度通过激波面，就得到了一个定常流动，如图所示。

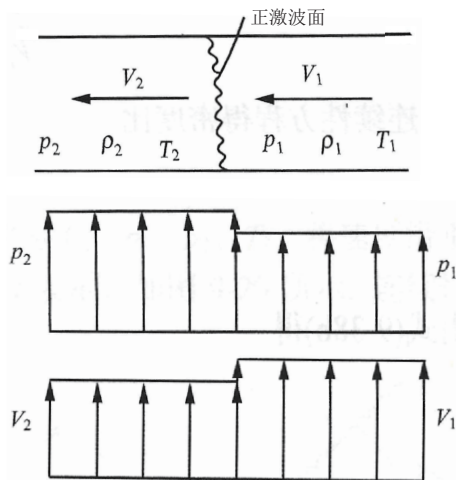
超音速气流通过正激波时，速度 V_1 从降低到 V_2 ，压强从 p_1 升高到 p_2 ，密度从 ρ_1 升高到 ρ_2 。

普朗特关系式

$$M_1^* M_2^* = 1$$

可见，超音速气流通过正激波后一定变为亚音速气流。

激波前速度越大，波后速度越小，反之亦然。

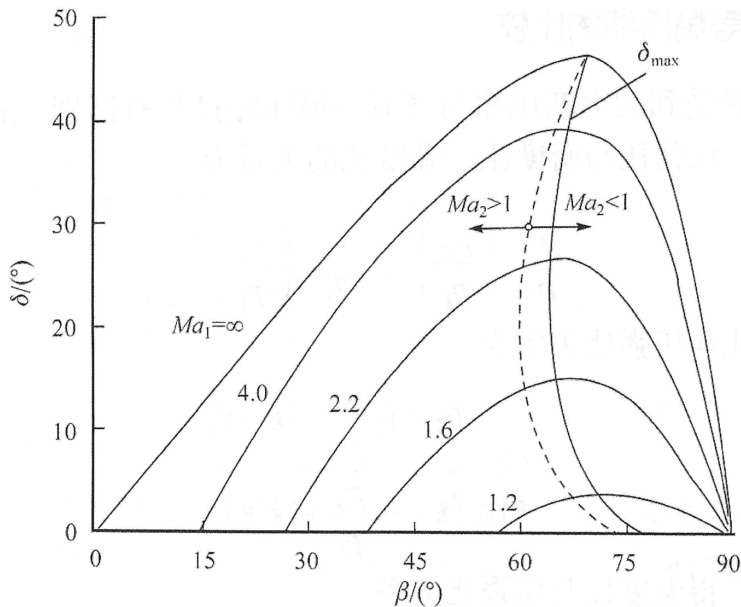


斜激波角与气流折转角关系曲线 ($k = 1.4$)

图中有一条激波后马赫数为1的虚线，虚线右方代表波后为亚音速，左方代表波后为超音速。

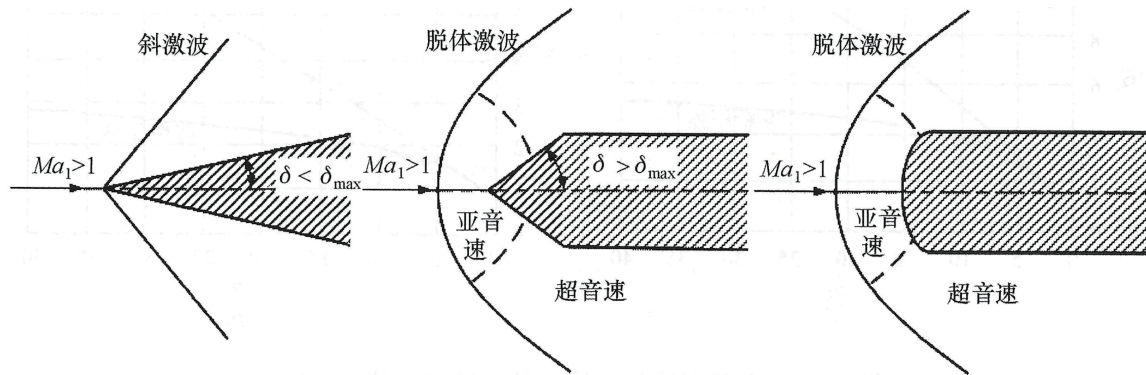
对于斜激波而言，在大部分斜激波角范围内，波后仍为超音速，只是在接近最大折转角 $\delta_{\max}$ 的小范围内才为亚音速。

因虚线与最大折转角连接线非常靠近，所以可近似地认为，当斜激波后的速度接近音速时，气流的折转角达到最大值 $\delta_{\max}$ 。



气流转折角与斜激波角间的关系 · 脱体激波

超音速气流流经 $\delta < \delta_{\max}$ 的凹钝角时会产生脱体激波，如图所示。



激波面的中间部分为正激波，后面是亚音速区。离开中间部分以后，波面的角度逐渐趋近于马赫角。脱体激波可造成较大的损失。

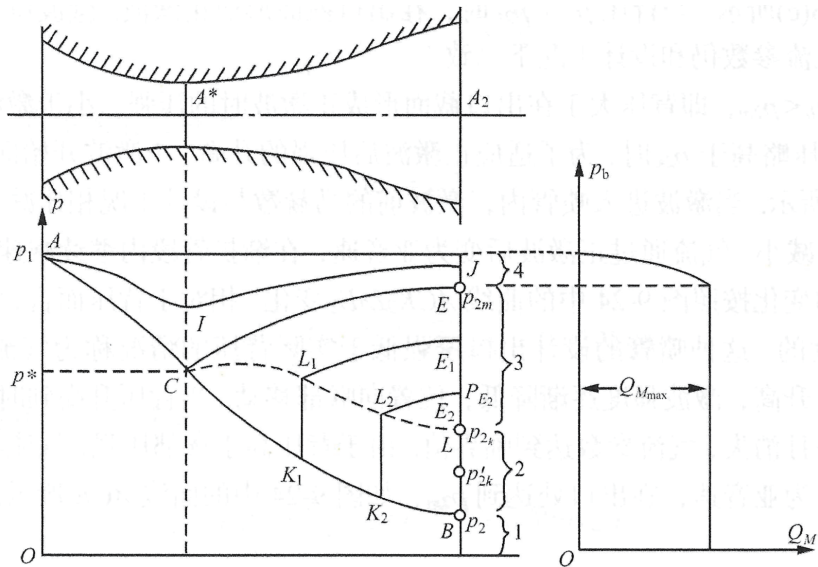
理想可压缩流体的流动

- ① 流体的热力学性质
- ② 可压缩流动的基本方程
- ③ 小扰动传播方程和音速
- ④ 一维定常等熵流动
- ⑤ 喷管中的等熵流动
- ⑥ 有摩擦的绝热管流
- ⑦ 超音速气流绕流与激波
- ⑧ 激波前后气体参数的关系
- ⑨ 喷管在非设计工况下流动

缩放管在变工况下的压强分布和流量曲线

在设计工况下，缩放喷管中气体压强按照如图所示的曲线 ACB 变化。

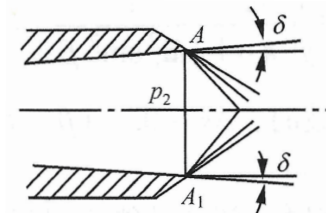
假定进口压强 p 不变，分三种情况讨论背压 p 变化时喷管的工作。



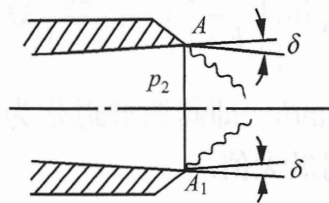
在非设计工况下缩放喷管超音速流动图形

三种情况：

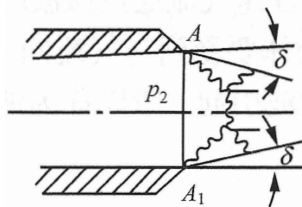
- ① 背压低于出口设计压强
- ② 背压高于出口设计压强
- ③ 激波在喉部消失后的流动



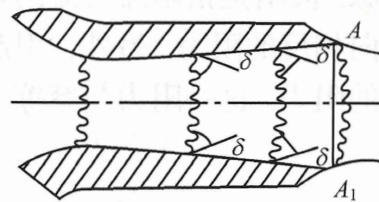
(a)



(b)



(c)



(d)

ACKNOWLEDGEMENTS

- 西安交通大学流体力学课程组
- 南京航空航天大学流体力学精品课程
- 山东大学能动学院流体力学教研组

声明：本稿之文本、公式及图片等有源自网络的内容，因条件限制我们无法找到作者及详细来源故未进行标注，其版权归原作者所有。如有不妥，请联系我们。

Thanks!
Welcome Questions