

工程流体力学 · 计算流体力学简介

COMPUTATIONAL FLUID DYNAMICS · INTRODUCTION

孙东科

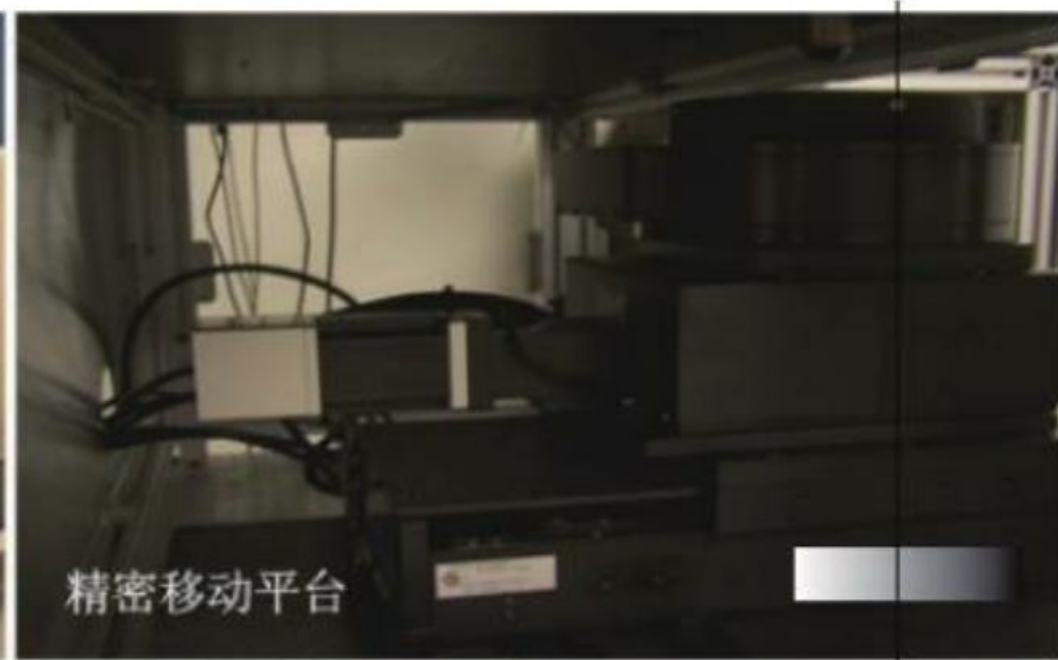
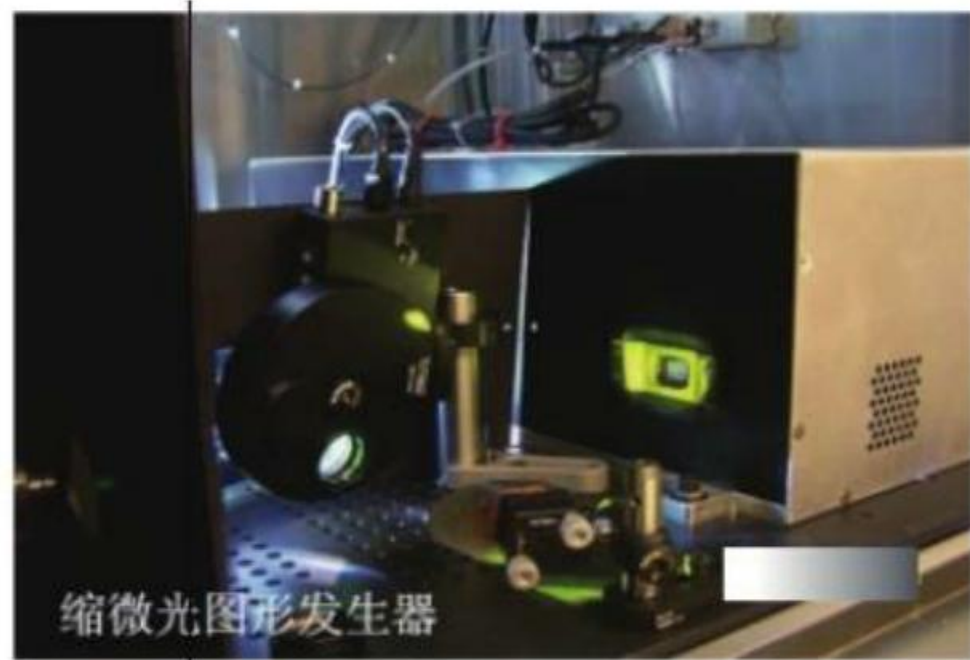
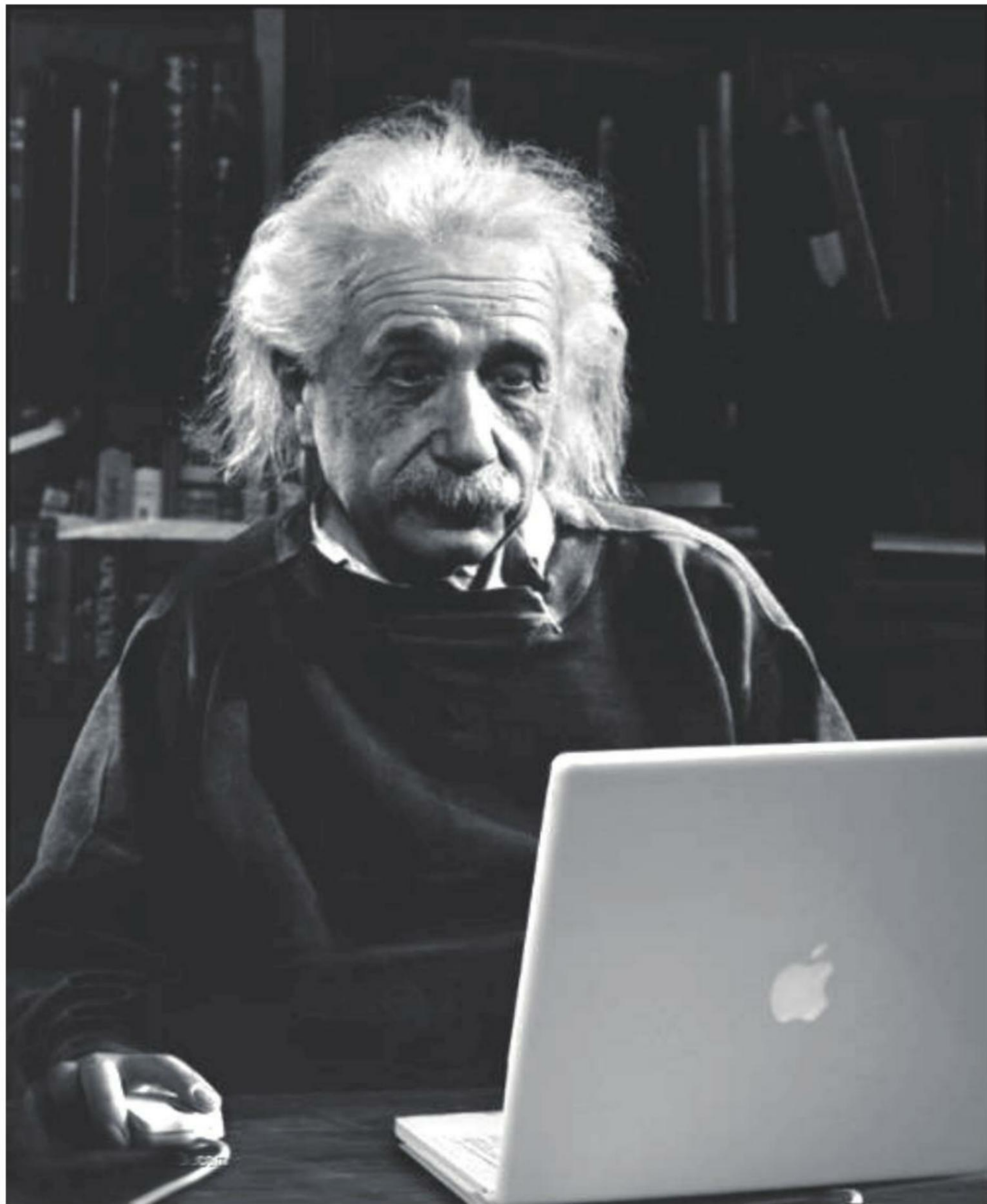
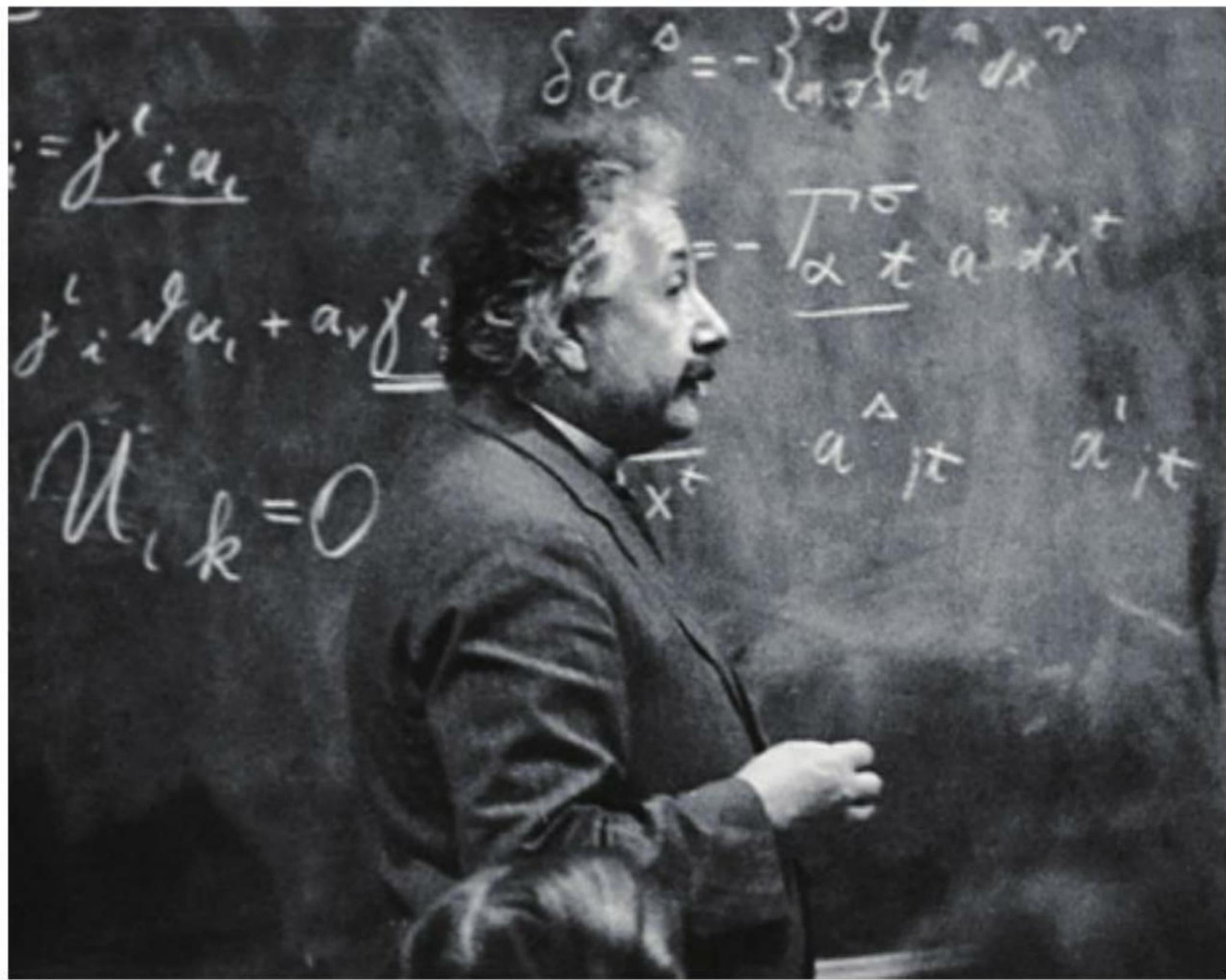
dksun@seu.edu.cn

东南大学机械工程学院，江苏南京
School of Mechanical Engineering, Southeast University, China

CFD · Introduction

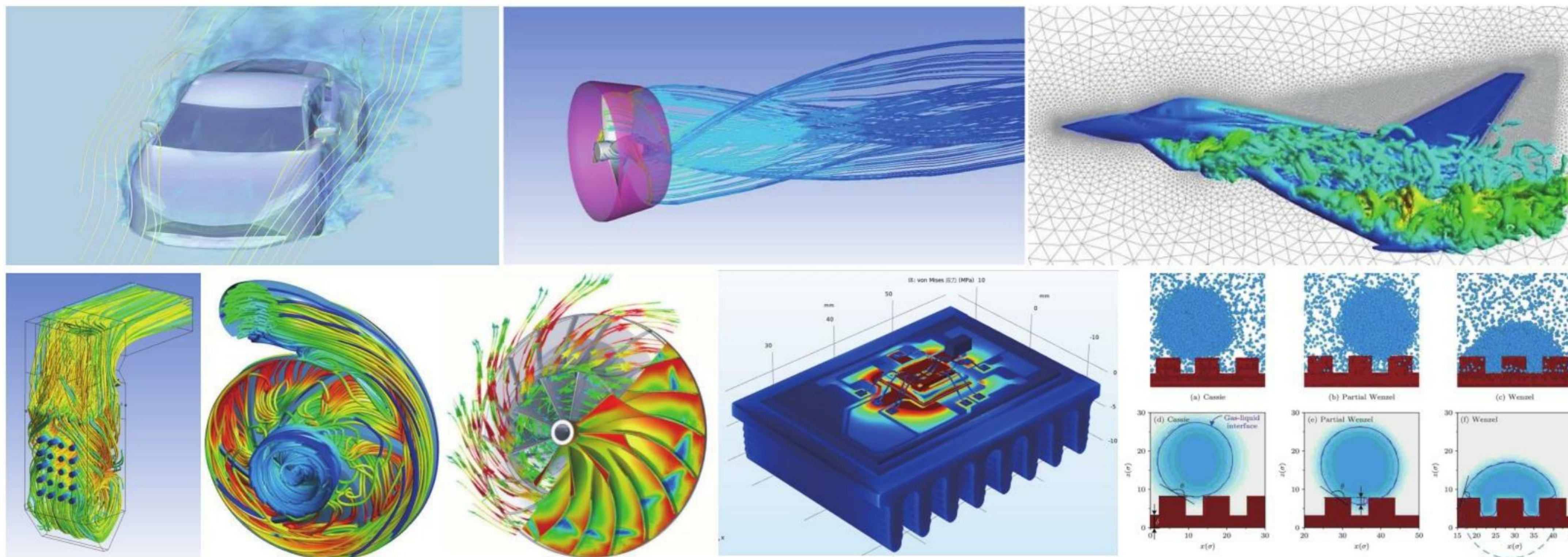
提纲

- ① 计算流体力学的基本概念
- ② 流体力学方程的离散方法
 - 数值微分
 - 数值积分
 - 有限差分法
- ③ 流体力学问题数值求解算例
 - 流场中小球的运动轨迹
 - 矩形管道中不可压缩流体的层流
 - 平板层流边界层的布拉修斯解
- ④ 当代计算流体力学的新进展
 - 计算流体力学分支
 - 湍流问题数值模拟
 - 格子玻尔兹曼方法简介
- ⑤ 计算流体力学发展前景展望
- ⑥ 总结与思考



计算流体力学简介

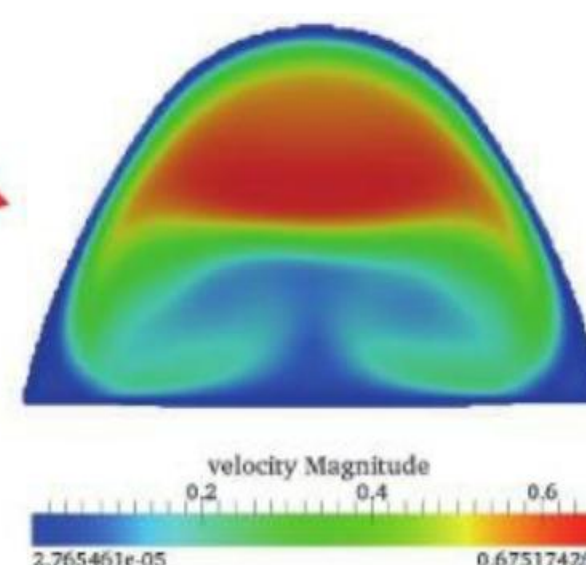
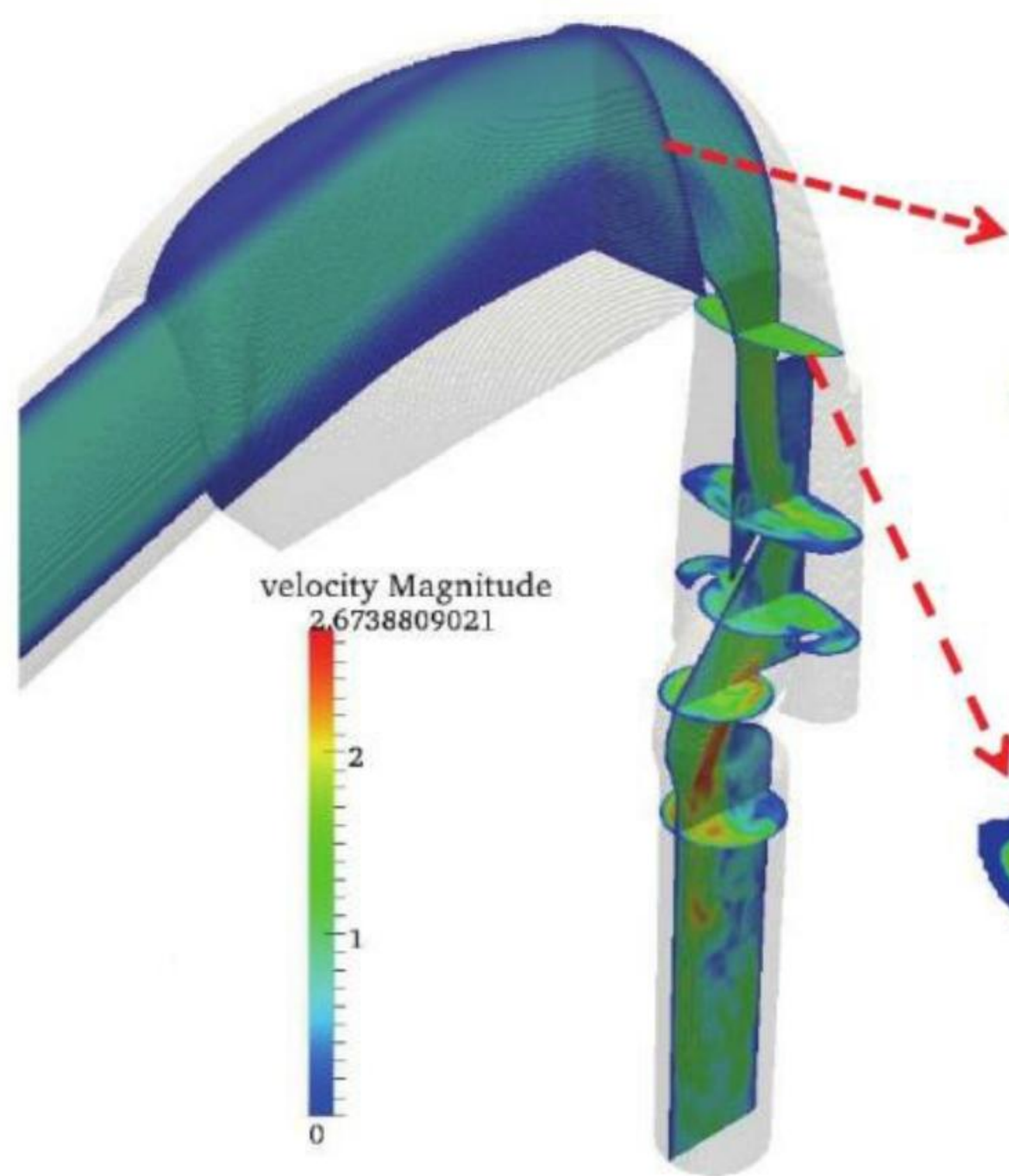
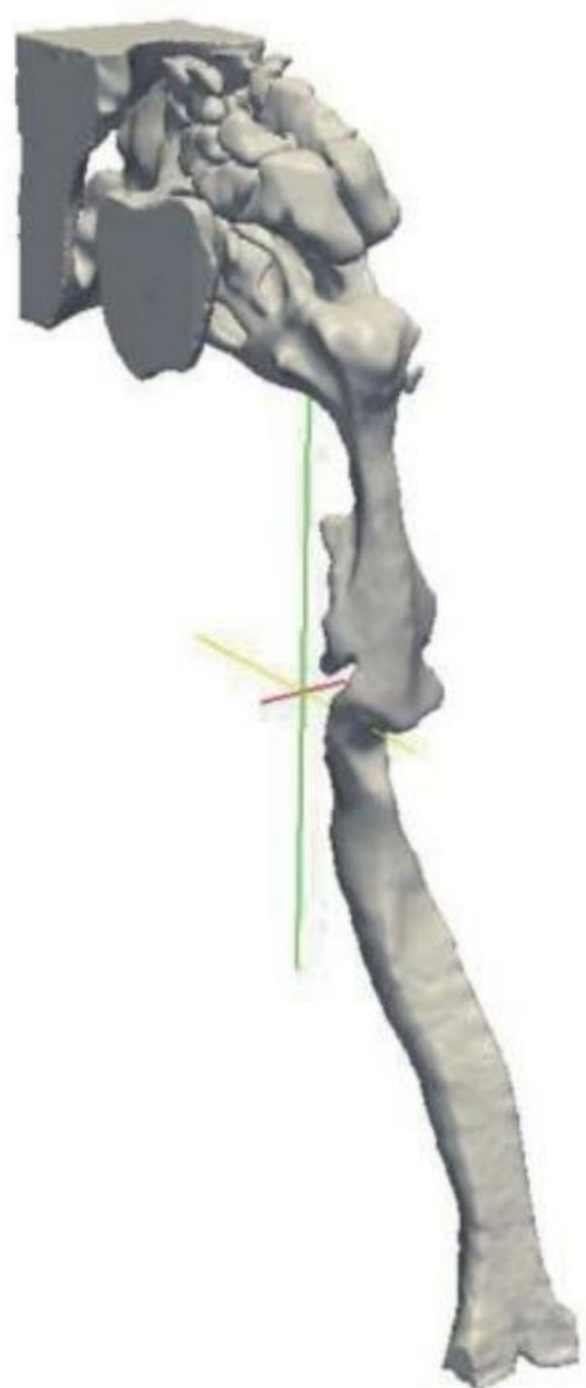
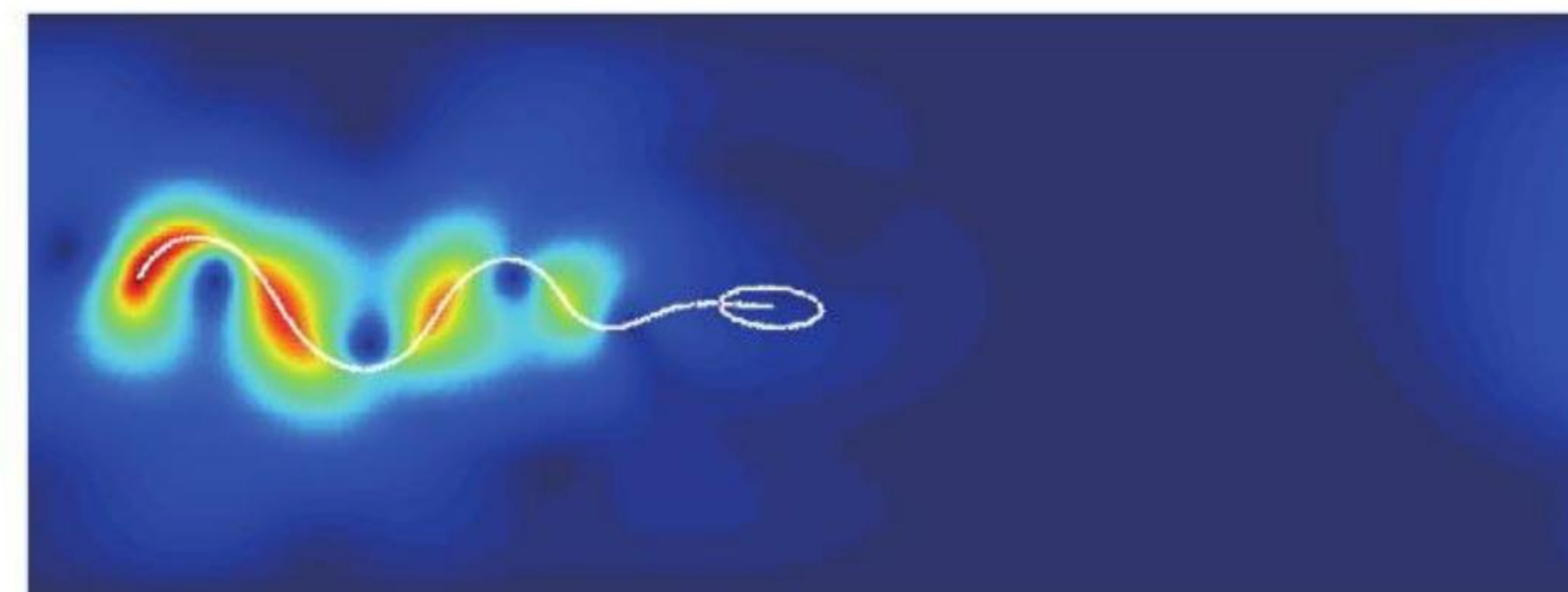
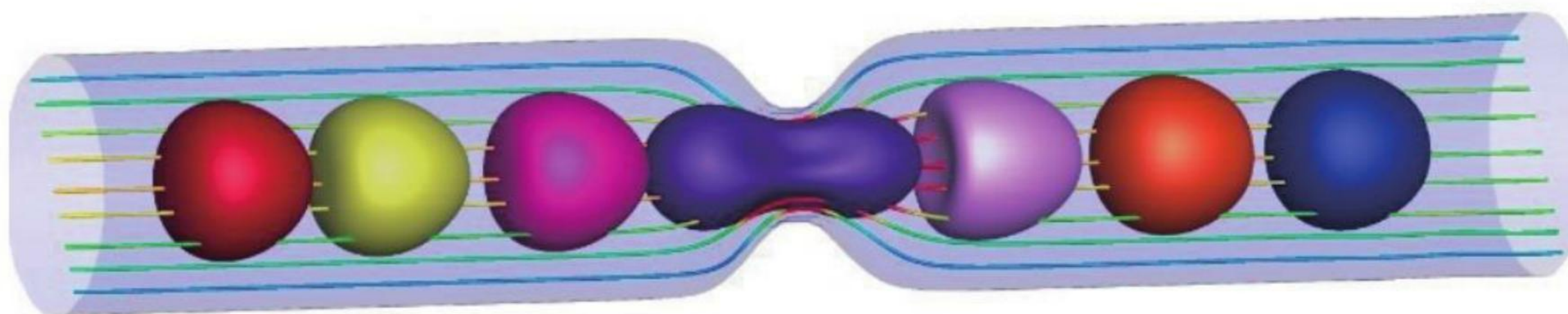
- ① 17 世纪, 法国和英国奠定了实验流体力学的基础.
- ② 18 世纪和 19 世纪, 理论流体力学在欧洲逐渐发展起来.
- ③ 20 世纪 60 年代, 计算流体力学成为流体力学研究的第三范式.



- 可以模拟复杂几何形状下的非线性复杂流动, 并部分代替实验工作;
- 用计算手段还可以发现一些理论解不出、实验测不到的流动新现象.

计算流体力学简介

数十年来, 计算流体力学获得了巨大成功, 解决了流体力学及其他相关学科中的诸多难题.



(a) Our result

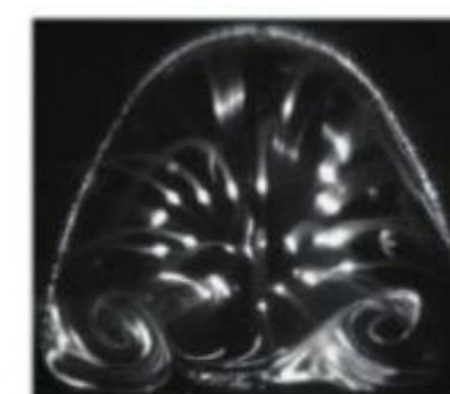
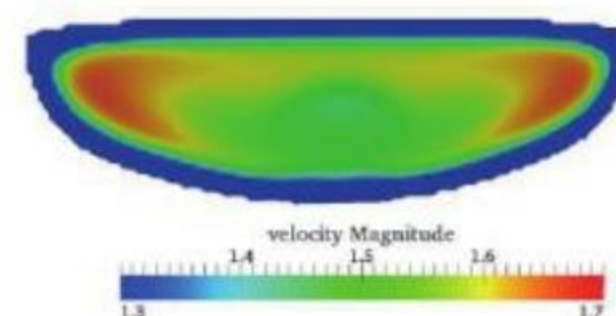


Fig. 5.9 in Ref. [1]

(b) Smoke array visualization.

Cross plane in Oral cavity, station 2

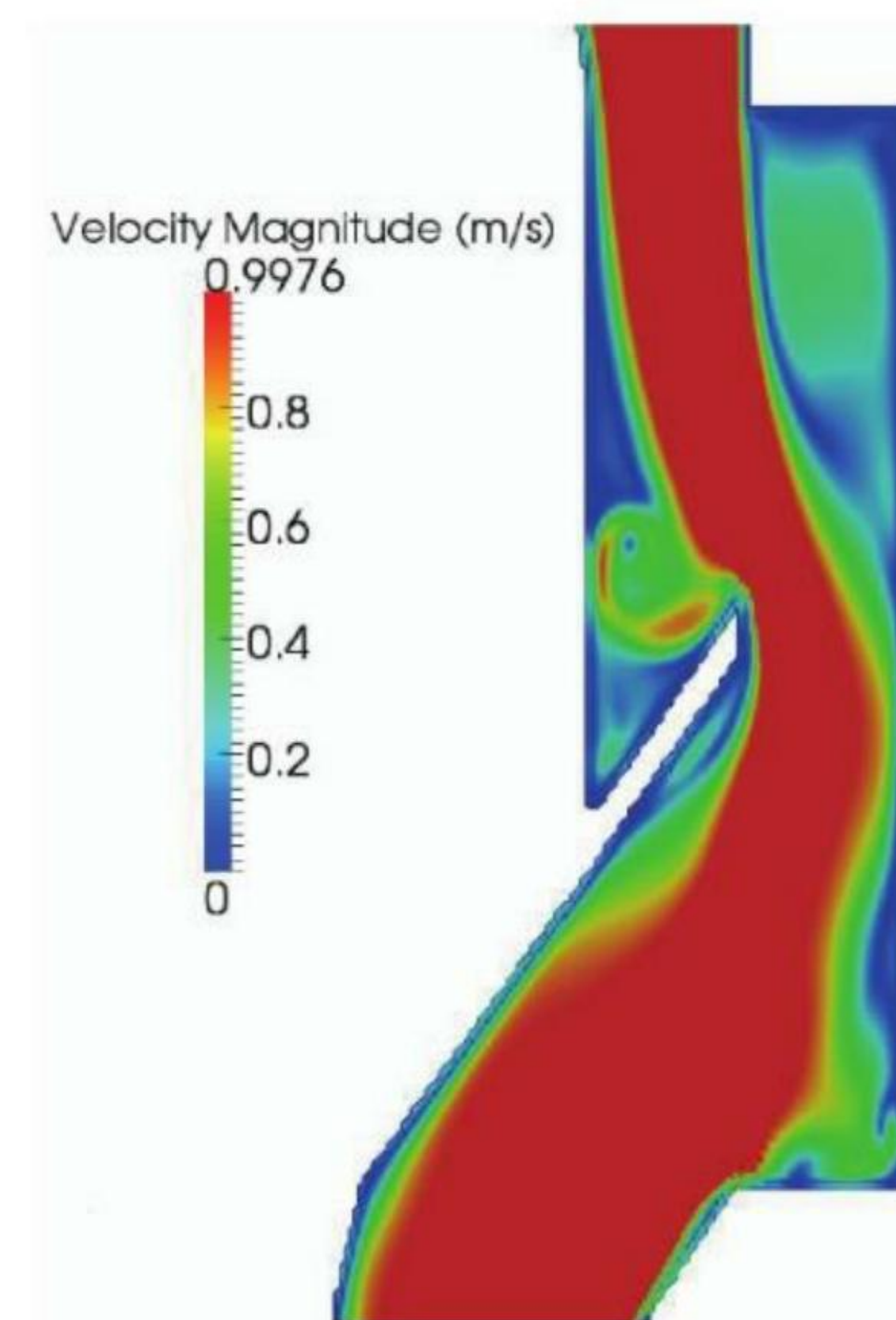


(a) Our result



Fig. 5.44 in Ref. [1]

(b) Smoke array visualization.



已广泛应用于机械、能源、化工、航空、气象、海洋、建筑、环境、生物、医疗等各领域。

提纲

① 计算流体力学的基本概念

② 流体力学方程的离散方法

数值微分

数值积分

有限差分法

③ 流体力学问题数值求解算例

流场中小球的运动轨迹

矩形管道中不可压缩流体的层流

平板层流边界层的布拉修斯解

④ 当代计算流体力学的新进展

计算流体力学分支

湍流问题数值模拟

格子玻尔兹曼方法简介

⑤ 计算流体力学发展前景展望

⑥ 总结与思考

计算流体力学的基本概念

计算流体力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD)

计算流体力学的基本概念

计算流体动力学 (Computational Fluid Dynamics, CFD)

在计算机中用数值方法对流体力学的控制方程进行求解，从而解释流动现象、揭示流动规律、预测流场演化过程的技术。

CFD的基本思想

- ① 把原来在时间域及空间域上连续的物理量的场，如速度场和压力场，用一系列有限个离散点上的变量值的集合来代替；
- ② 通过一定的原则和方式建立起关于这些离散点上场变量之间关系的代数方程组，然后求解代数方程组获得场变量的近似值；
- ③ 通过数值计算和图像显示技术，对含有流动、传热、传质、相变等现象的系统进行分析研究。

计算流体力学的基本概念

CFD可以看做是在流动基本方程控制下对流动的数值模拟。通过数值模拟，我们

- ① 可以得到极其复杂问题的流场内各处基本物理量（如速度、压力、温度、浓度等）的分布，以及
- ② 这些物理量随时间的变化情况，确定涡旋分布特性、空化特性及脱流区等，
- ③ 还可据此算出其他物理量，如旋转式流体机械的转矩、水力损失和效率等。

此外，CFD可以与CAD、CAE联合，进行结构优化、工艺寻优、工程设计等等。

计算流体力学的基本概念

CFD可以看做是在流动基本方程控制下对流动的数值模拟。通过数值模拟，我们

- ① 可以得到极其复杂问题的流场内各处基本物理量（如速度、压力、温度、浓度等）的分布，以及
- ② 这些物理量随时间的变化情况，确定涡旋分布特性、空化特性及脱流区等，
- ③ 还可据此算出其他物理量，如旋转式流体机械的转矩、水力损失和效率等。

此外，CFD可以与CAD、CAE联合，进行结构优化、工艺寻优、工程设计等等。

计算流体力学 (CFD) 最基本的考虑 (三个基本问题)

计算流体力学的基本概念

CFD可以看做是在流动基本方程控制下对流动的数值模拟。通过数值模拟，我们

- ① 可以得到极其复杂问题的流场内各处基本物理量（如速度、压力、温度、浓度等）的分布，以及
- ② 这些物理量随时间的变化情况，确定涡旋分布特性、空化特性及脱流区等，
- ③ 还可据此算出其他物理量，如旋转式流体机械的转矩、水力损失和效率等。

此外，CFD可以与CAD、CAE联合，进行结构优化、工艺寻优、工程设计等等。

计算流体力学 (CFD) 最基本的考虑 (三个基本问题)

- ① 如何在计算机上合理地描述流体。
- ② 如何用合适的算法求解控制方程。
- ③ 如何直观地显示和呈现计算结果。

计算流体力学的基本概念

CFD可以看做是在流动基本方程控制下对流动的数值模拟。通过数值模拟，我们

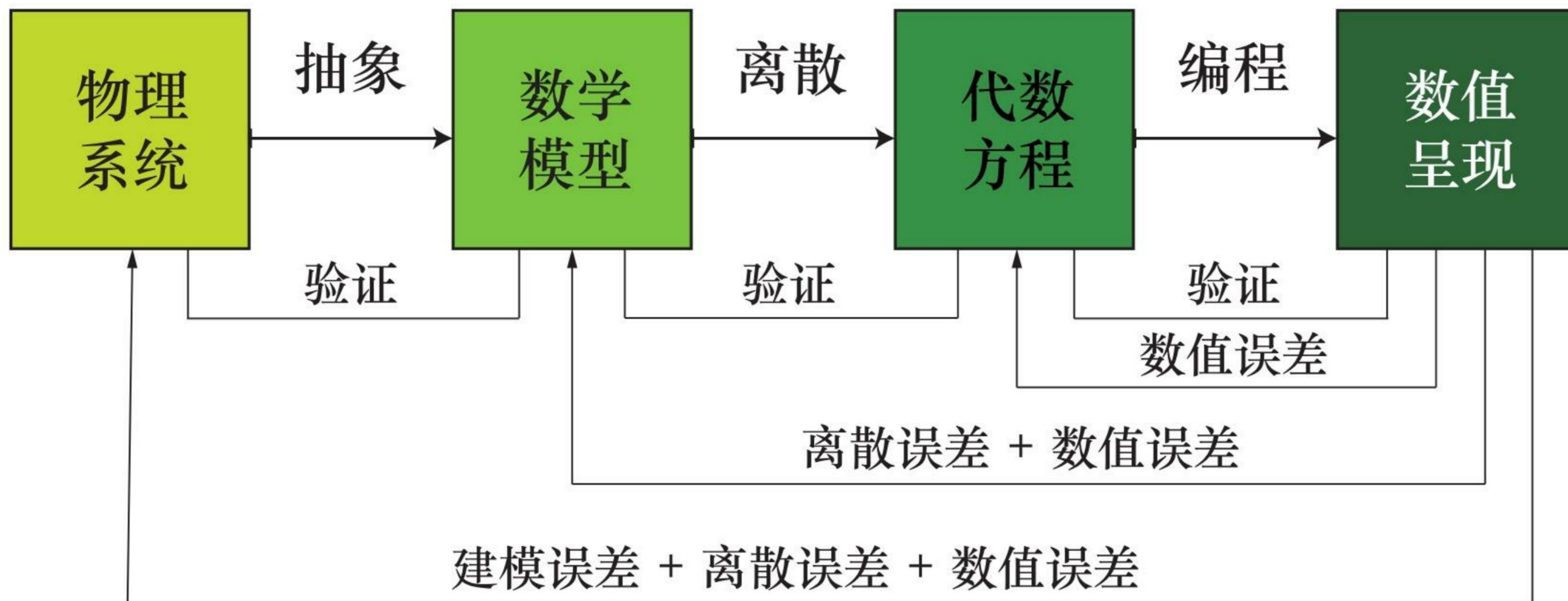
- ① 可以得到极其复杂问题的流场内各处基本物理量（如速度、压力、温度、浓度等）的分布，以及
- ② 这些物理量随时间的变化情况，确定涡旋分布特性、空化特性及脱流区等，
- ③ 还可据此算出其他物理量，如旋转式流体机械的转矩、水力损失和效率等。

此外，CFD可以与CAD、CAE联合，进行结构优化、工艺寻优、工程设计等等。

计算流体力学 (CFD) 最基本的考虑 (三个基本问题)

- | | |
|-------------------|---------|
| ① 如何在计算机上合理描述流体。 | ⇐ 抽象建模 |
| ② 如何用合适的算法求解控制方程。 | ⇐ 数值求解 |
| ③ 如何直观地显示和呈现计算结果。 | ⇐ 数据可视化 |

计算流体力学的基本概念



- 检验 (Validation): 求解一个正确的方程。强调方程的**正确性**，即数学方程应**真实**地描述物理世界。
- 证明 (Verification): 用正确的方法解方程。强调方法的**可靠性**，即数值方法应**可靠**地映射数学描述。

提纲

① 计算流体力学的基本概念

② 流体力学方程的离散方法

数值微分

数值积分

有限差分法

③ 流体力学问题数值求解算例

流场中小球的运动轨迹

矩形管道中不可压缩流体的层流

平板层流边界层的布拉修斯解

④ 当代计算流体力学的新进展

计算流体力学分支

湍流问题数值模拟

格子玻尔兹曼方法简介

⑤ 计算流体力学发展前景展望

⑥ 总结与思考

数值微分 · 最简单的数值微分公式

由函数 $f(x)$ 导数的定义

函数导数的定义

数值微分 · 最简单的数值微分公式

由函数 $f(x)$ 导数的定义

函数导数的定义

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

可知：当 h 足够小时，可用差商近似导数。

数值微分 · 最简单的数值微分公式

由函数 $f(x)$ 导数的定义

函数导数的定义

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

可知：当 h 足够小时，可用差商近似导数。

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

这是最简单的**数值微分**公式。

数值微分 · 差商型求导公式

① 向前差商公式

② 向后差商公式

③ 中心差商公式

数值微分 · 差商型求导公式

① 向前差商公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

② 向后差商公式

③ 中心差商公式

数值微分 · 差商型求导公式

① 向前差商公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

② 向后差商公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

③ 中心差商公式

数值微分 · 差商型求导公式

① 向前差商公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

② 向后差商公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$$

③ 中心差商公式

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

数值微分 · 差商型求导公式

用 Taylor 级数公式可得到上述三种差商的余项公式

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{f''(x + \theta_1 h)}{2} h - \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{f''(x - \theta_2 h)}{2} h - \dots$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(x + \theta_1 h) - f'''(x - \theta_2 h)}{2} h^2 + \dots$$

其中, $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$.

数值微分 · 差商型求导公式

用 Taylor 级数公式可得到上述三种差商的余项公式

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - O(h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - O(h^2).$$

其中, $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$.

数值微分 · 差商型求导公式

用 Taylor 级数公式可得到上述三种差商的余项公式

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - O(h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + O(h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - O(h^2).$$

其中, $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$.

- ① 从余项公式可见, 用差商近似导数的精度与步长 h 有关, h 越小则精度越高.
- ② 中心差商公式的余项与 h^2 同阶, 应比向前差商公式、向后差商公式的精度高.
- ③ 在实际计算中, 步长 h 不宜过小, 否则会因有效数字 (机器误差) 损失而使误差增大. $\Leftarrow$ 还有稳定性原因, 见高级CFD课程。

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

■ 概念

一般地, 若已知 $y = f(x)$ 在互不相同 $n + 1$ 个点 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 处的函数值 $y_0, y_1, \dots, y_n$, 即该函数过 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ 这 $n + 1$ 个点, 则可以考虑构造一个过这 $n + 1$ 个点且次数不超过 n 的多项式 $y = P_n(x)$, 使其满足:

$$P_n(x_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

要估计任一点 $\xi (\xi \neq x_i, i = 0, 1, 2, \dots, n)$, 则可以用 $P_n(\xi)$ 的值作为准确值 $f(\xi)$ 的近似值. 这种方法叫做"插值法". 上式称为插值条件或准则, 含 $x_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 的最小区间 $[a, b]$. 其中

$$a = \min \{x_0, x_1, \dots, x_n\}, \quad b = \max \{x_0, x_1, \dots, x_n\}.$$

■ 定理

满足插值条件且次数不超过 n 的多项式是存在而且是唯一的。

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

在平面上有 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 共 n 个点. 现作一条函数 $f(x)$ 使其图像经过这 n 个点.

作法: 设集合 D_n 是关于点 (x, y) 的角标的集合, $D_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. 作 n 个多项式 $p_j(x)$, $j \in D_n$. 对于任意 $k \in D_n$, 都有 $p_k(x)$, $B_k = \{i \mid i \neq k, i \in D_n\}$ 使得

$$p_k(x) = \prod_{i \in B_k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

此时, $p_k(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, 满足 $\forall m \in B_k, p_k(x_m) = 0$ 并且 $p_k(x_k) = 1$. 最终可得

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

在平面上有 $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_{n-1}, y_{n-1})$ 共 n 个点. 现作一条函数 $f(x)$ 使其图像经过这 n 个点.

作法: 设集合 D_n 是关于点 (x, y) 的角标的集合, $D_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. 作 n 个多项式 $p_j(x)$, $j \in D_n$. 对于任意 $k \in D_n$, 都有 $p_k(x)$, $B_k = \{i \mid i \neq k, i \in D_n\}$ 使得

$$p_k(x) = \prod_{i \in B_k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}.$$

此时, $p_k(x)$ 是 $n-1$ 次多项式, 满足 $\forall m \in B_k, p_k(x_m) = 0$ 并且 $p_k(x_k) = 1$. 最终可得

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} y_j p_j(x), \quad y_j = f(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

以上插值多项式 $L_n(x)$ 称为拉格朗日插值多项式 (Lagrange Interpolation Polynomial).

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

- ▶ 当 $n = 2$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为
- ▶ 当 $n = 3$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为
- ▶ 当 $n = 4$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

- ▶ 当 $n = 2$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

$$f(x) = L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1$$

- ▶ 当 $n = 3$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

- ▶ 当 $n = 4$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

- ▶ 当 $n = 2$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

$$f(x) = L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1$$

- ▶ 当 $n = 3$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

$$f(x) = L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2$$

- ▶ 当 $n = 4$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

数值微分 · 知识回顾：拉格朗日插值多项式

- 当 $n = 2$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

$$f(x) = L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1$$

- 当 $n = 3$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

$$f(x) = L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2$$

- 当 $n = 4$ 时, 拉格朗日插值多项式可写为

$$f(x) = L_4(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)}y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)}y_1 \\ + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)}y_2 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}y_3$$

数值微分 · 插值型求导公式

基本思想: 已知函数在一些离散点上的值时, 可用插值多项式近似函数, 所以可用插值多项式的导数作为函数导数的近似值.

假设已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 $n+1$ 个节点 $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 处的函数值 $y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, 如果其插值多项式为 $L_{n+1}(x)$,

$$L_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n y_j p_j(x), \quad p_k(x) = \prod_{i \in B_k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad B_k = \{i \mid i \neq k, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

则可用 $L_{n+1}(x)$ 的导数近似函数 $f(x)$ 的导数,

数值微分 · 插值型求导公式

基本思想: 已知函数在一些离散点上的值时, 可用插值多项式近似函数, 所以可用插值多项式的导数作为函数导数的近似值.

假设已知函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 内 $n+1$ 个节点 $x_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ 处的函数值 $y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$, 如果其插值多项式为 $L_{n+1}(x)$,

$$L_{n+1}(x) = \sum_{j=0}^n y_j p_j(x), \quad p_k(x) = \prod_{i \in B_k} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}, \quad B_k = \{i \mid i \neq k, i = 0, 1, 2, \dots, n\}$$

则可用 $L_{n+1}(x)$ 的导数近似函数 $f(x)$ 的导数,

$$f'(x) \approx L'_{n+1}(x), \quad x \in [a, b]$$

这样得到的导数公式称为插值型求导公式.

数值微分 · 插值型求导公式

下面给出等距节点条件下, 求一阶导数的几个常用公式.

1) 两点公式

对于函数 $f(x)$, 过节点 x_0, x_1 ($x_1 = x_0 + h$) 的 拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式为

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{h} f(x_1) - \frac{x - x_1}{h} f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \approx L'_2(x), \quad x \in [x_0, x_1]$$

得两点公式

数值微分 · 插值型求导公式

下面给出等距节点条件下, 求一阶导数的几个常用公式.

1) 两点公式

对于函数 $f(x)$, 过节点 x_0, x_1 ($x_1 = x_0 + h$) 的 拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式为

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{h} f(x_1) - \frac{x - x_1}{h} f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f'(x) \approx L'_2(x), \quad x \in [x_0, x_1]$$

得两点公式

$$f'(x_0) = f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

截断误差为

数值微分 · 插值型求导公式

下面给出等距节点条件下, 求一阶导数的几个常用公式.

1) 两点公式

对于函数 $f(x)$, 过节点 x_0, x_1 ($x_1 = x_0 + h$) 的 拉格朗日 (Lagrange) 插值多项式为

$$L_2(x) = \frac{x - x_0}{h} f(x_1) - \frac{x - x_1}{h} f(x_0) \Rightarrow f'(x) \approx L'_2(x), \quad x \in [x_0, x_1]$$

得两点公式

$$f'(x_0) = f'(x_1) \approx \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

截断误差为

$$\begin{cases} f'(x_0) - L'_2(x_0) = -\frac{h}{2} f''(\xi_0) \\ f'(x_1) - L'_2(x_1) = -\frac{h}{2} f''(\xi_1) \end{cases}, \quad \xi_0, \xi_1 \in (a, b)$$

数值微分 · 插值型求导公式

2) 三点公式

对于函数 $f(x)$, 过节点 $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2$) 的 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} f(x_0) - \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f(x_2)$$

数值微分 · 插值型求导公式

2) 三点公式

对于函数 $f(x)$, 过节点 $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2$) 的 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} f(x_0) - \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f(x_2)$$

求导得

$$L'_3(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f(x_0) - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f(x_1) + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f(x_2)$$

分别代入 x_0, x_1, x_2 得三点公式

数值微分 · 插值型求导公式

2) 三点公式

对于函数 $f(x)$, 过节点 $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2$) 的 Lagrange 插值多项式为

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{2h^2} f(x_0) - \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{h^2} f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2h^2} f(x_2)$$

求导得

$$L'_3(x) = \frac{2x - x_1 - x_2}{2h^2} f(x_0) - \frac{2x - x_0 - x_2}{h^2} f(x_1) + \frac{2x - x_0 - x_1}{2h^2} f(x_2)$$

分别代入 x_0, x_1, x_2 得三点公式

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) \approx \frac{1}{2h} [-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2)] \\ f'(x_1) \approx \frac{1}{2h} [-f(x_0) + f(x_2)] \\ f'(x_2) \approx \frac{1}{2h} [f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2)] \end{array} \right.$$

数值微分 · 插值型求导公式

截断误差为

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x_0) - L'_3(x_0) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0) \\ f'(x_1) - L'_3(x_1) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi_1), \\ f'(x_2) - L'_3(x_2) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2) \end{array} \right. \quad \xi_i \in (a, b), \quad i = 0, 1, 2$$

数值微分 · 插值型求导公式

截断误差为

$$\begin{cases} f'(x_0) - L'_3(x_0) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi_0) \\ f'(x_1) - L'_3(x_1) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi_1), \\ f'(x_2) - L'_3(x_2) = \frac{h^2}{3} f'''(\xi_2) \end{cases} \quad \xi_i \in (a, b), \quad i = 0, 1, 2$$

求二阶导数的三点公式为

$$f''(x_i) \approx L''_3(x_i) = \frac{1}{h^2} [f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)], \quad i = 0, 1, 2$$

除了差商型求导和插值型求导两种方法以外, 还有利用样条函数求导的数值微分方法.

数值积分 · 基本思想

构造数值积分方法的基本思想

已知被积函数在积分区间上的某些节点处的函数值, 可将这些函数值的线性组合作为定积分的近似值。



基于上述思想, 得

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{k=0}^n A_k f(x_k)$$

其中, A_k 称为求积系数.

- ① 求积系数 A_k 只与节点 x_k 有关, 与被积函数 $f(x)$ 无关.
- ② 节点和求积系数可用多种方法确定, 可得不同求积公式.

数值积分 · NEWTON-COTES 公式

Newton-Cotes 公式取等距节点.

取节点 $x_k = a + kh$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), 其中 $h = (b - a)/n$, 而 $x = a + th$. 有

Newton-Cotes 积分公式

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx (b - a) \sum_{k=0}^n C_k^{(n)} f(x_k)$$

上式称为 n 阶 Newton-Cotes 公式. 其中, $C_k^{(n)}$ 称为 Cotes 系数

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!n} \int_0^n \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n (t - j) dt$$

数值积分 · NEWTON-COTES 公式

当 $n = 1$ 时, $C_0^{(1)} = C_1^{(1)} = 1/2$, 有

梯形积分公式

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} [f(a) + f(b)]$$

当 $n = 2$ 时, 有

Simpson 积分公式

$$I(f) = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6} \left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]$$

有限差分法

有限差分法的基本思想

先对求解区域作网格剖分, 将自变量的连续变化区域用有限离散点(网格点)集代替.

将问题中出现的连续变量的函数, 用定义在网格点上离散变量的函数代替.

通过用网格点上函数的差商代替导数, 将含连续变量的偏微分方程定解问题化为只含有限个未知数的代数方程组 (差分格式).

若差分格式有解, 且当网格无限变小时其解收敛于原微分方程定解问题的解, 则差分格式的解就作为原问题的近似解 (数值解).



有限差分法

因此, 有限差分法求解偏微分方程定解问题一般需有下列步骤

有限差分法求解偏微分方程的步骤

- ① 时空剖分网格;
- ② 对微分方程和定解条件选择差分近似, 列出差分格式;
- ③ 求解差分格式;
- ④ 讨论差分格式解及偏微分方程解的收敛性, 误差估计.

有限差分法是求偏微分方程定解问题的数值解中应用最广泛的方法之一.

下面通过一个简单例子说明有限差分法的基本概念及其求解偏微分方程的过程.

有限差分法

设有一阶双曲型方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & t > 0, -\infty < x < +\infty \\ u(x, 0) = \varphi(x) \end{cases}$$

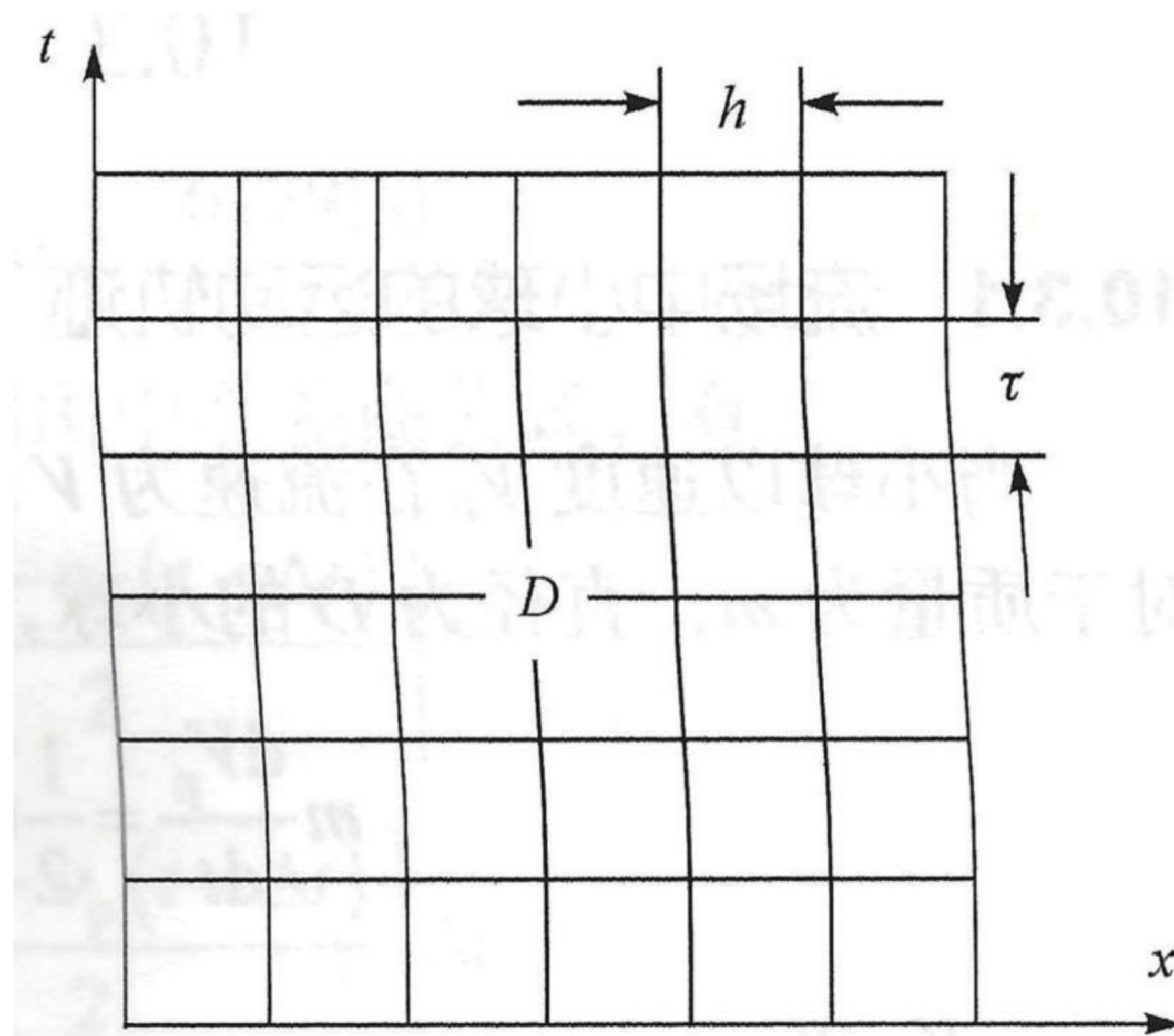
首先, 对定解区域

$$D = \{(x, t) \mid -\infty < x < +\infty, t \geq 0\}$$

作网格剖分, 最简单的一种网格是用两族分别平行于 x 轴和 t 轴的等距直线

$$x = x_k = kh, \quad t = t_j = j\tau,$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, j = 0, 1, 2, \dots$$



有限差分法

若用向前差商表示一阶偏导数, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_k, t_j)} = \frac{u(x_{k+1}, t_j) - u(x_k, t_j)}{h} - \frac{h}{2} u''_x(x_k + \theta_1 h, t_j)$$
$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x_k, t_j)} = \frac{u(x_k, t_{j+1}) - u(x_k, t_j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_t(x_k, t_j + \theta_2 \tau)$$

其中, $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$.

待解方程在节点 $(x_k, t_j | k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, j=0, 1, 2, \dots)$ 处可表示成

有限差分法

若用向前差商表示一阶偏导数, 即

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x_k, t_j)} = \frac{u(x_{k+1}, t_j) - u(x_k, t_j)}{h} - \frac{h}{2} u''_x(x_k + \theta_1 h, t_j)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{(x_k, t_j)} = \frac{u(x_k, t_{j+1}) - u(x_k, t_j)}{\tau} - \frac{\tau}{2} u''_t(x_k, t_j + \theta_2 \tau)$$

其中, $0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq 1$.

待解方程在节点 $(x_k, t_j | k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, j=0, 1, 2, \dots)$ 处可表示成

$$\frac{u(x_k, t_{j+1}) - u(x_k, t_j)}{\tau} + a \frac{u(x_{k+1}, t_j) - u(x_k, t_j)}{h} = \frac{\tau}{2} u''_t(x_k, t_j + \theta_2 \tau) + \frac{ah}{2} u''_x(x_k + \theta_1 h, t_j) = R(x_k, t_j),$$

其中 $u(x_k, 0) = \varphi(x_k)$.

有限差分法

由于当 h, τ 足够小时, $R(x_k, t_j)$ 是小量, 可忽略, 于是得到有限差分方程

$$\frac{u_{k,j+1} - u_{k,j}}{\tau} + a \frac{u_{k+1,j} - u_{k,j}}{h} = 0$$

这里, $u_{k,j}$ 可看作方程的解在节点 (x_k, t_j) 处的近似值. 由初始条件有

$$u_{k,0} = \varphi(x_k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

将上两式相结合, 就得到上述问题数值求解的有限差分格式.

- ① $R(x_k, t_j) = O(\tau + h)$ 称差分方程的截断误差.
- ② 如果一个差分方程的截断误差为 $R = O(\tau^q + h^p)$, 则称差分方程对 t 是 q 阶精度, 对 x 是 p 阶精度的.
- ③ 显然, 截断误差的阶数越大, 差分方程对微分方程的逼近越好.

有限差分法 · 几点说明

有限差分法求解偏微分方程的必要条件.

相容性

当网格步长趋于 0 时, 差分格式的截断误差也趋于 0, 则称差分方程与相应的微分方程是相容的.

收敛性

当网格步长趋于 0 时, 差分格式的解能够收敛到相应微分方程定解问题的精确解, 则称这种差分格式是收敛的.

有限差分法 · 几点说明

用差分格式求解时, 除了截断误差外, 每步计算都会产生舍入误差. 在递推计算过程中, 误差还会传播. 对计算过程中误差传播的讨论就是差分格式的稳定性问题.

稳定性

- ① 如果某种差分格式在求解过程中误差越来越大, 以致所求的解完全失真, 则称该差分格式数值不稳定.
 - ② 差分格式的稳定性不仅与差分格式本身有关, 而且与时空网格步长之比有关, 但与所求微分方程无关.
- 如果一种差分格式对任意网格比都稳定, 则称该差分格式无条件稳定; 若只对某些网格比的值稳定, 则称为条件稳定;
 - 如果一种差分格式对任意网格比都不稳定, 则称完全不稳定, 这种差分格式是无效的.

提纲

- ① 计算流体力学的基本概念
- ② 流体力学方程的离散方法
 - 数值微分
 - 数值积分
 - 有限差分法
- ③ 流体力学问题数值求解算例
 - 流场中小球的运动轨迹
 - 矩形管道中不可压缩流体的层流
 - 平板层流边界层的布拉修斯解
- ④ 当代计算流体力学的新进展
 - 计算流体力学分支
 - 湍流问题数值模拟
 - 格子玻尔兹曼方法简介
- ⑤ 计算流体力学发展前景展望
- ⑥ 总结与思考

流场中小球的运动轨迹

小球以速度 $\mathbf{V}_p$ 在流速为 $\mathbf{V}$ 的空气中运动时, 会受到与相对速度方向相反的阻力. 请求解小球的运动轨迹.

对于质量为 m , 直径为 D 的小球, 根据牛顿第二定律写出运动方程

$$m \frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \frac{1}{2} C_D \rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_p|^2 \frac{\mathbf{V} - \mathbf{V}_p}{|\mathbf{V} - \mathbf{V}_p|} - mg\mathbf{k}$$

式中, $\mathbf{k}$ 是重力反方向的单位向量. 值得注意的是: 上式忽略了浮力的影响.

注意到松弛时间为

$$\tau = \frac{m}{3\pi D\mu}$$

雷诺数为

$$\text{Re} = \frac{\rho |\mathbf{V} - \mathbf{V}_p| D}{\mu}$$

流场中小球的运动轨迹

因此, 运动方程可写成

$$\frac{d\mathbf{V}_p}{dt} = \frac{C_D Re}{24} \frac{\mathbf{V} - \mathbf{V}_p}{\tau} - g\mathbf{k}$$

上式为矢量方程, 可改写为标量方程

$$\begin{cases} \frac{du_p}{dt} = \frac{C_D Re}{24} \frac{u - u_p}{\tau} \\ \frac{dv_p}{dt} = \frac{C_D Re}{24} \frac{v - v_p}{\tau} \\ \frac{dw_p}{dt} = \frac{C_D Re}{24} \frac{w - w_p}{\tau} - g \end{cases}$$

将 $u_p = \frac{dx}{dt}$, $v_p = \frac{dy}{dt}$, $w_p = \frac{dz}{dt}$ 代入上述方程组, 可得关于时空的常微分方程.

当初始位置和初始速度已知时, 就可对其进行数值求解, 从而得到小球的运动轨迹.

流场中小球的运动轨迹 · 例题

例 1: 质量 $m = 46.55 \text{ g}$, 直径 $D = 44.45 \text{ mm}$ 的高尔夫球, 在 xz 平面内与 x 轴成 30° 角, 以初始速度 $V_p = 36.60 \text{ m/s}$ 飞出. 求该球的飞行时间 t 和轨迹.

设高尔夫球不旋转, 空气密度 $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$, 空气动力黏度 $\mu = 1.81 \times 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$. 为计算简单, 假定当雷诺数小于临界雷诺数 9.0×10^4 时, 阻力系数 $C_D = 0.40$, 否则 $C_D = 0.10$.

解:

流场中小球的运动轨迹 · 例题

例 1: 质量 $m = 46.55 \text{ g}$, 直径 $D = 44.45 \text{ mm}$ 的高尔夫球, 在 xz 平面内与 x 轴成 30° 角, 以初始速度 $V_p = 36.60 \text{ m/s}$ 飞出. 求该球的飞行时间 t 和轨迹.

设高尔夫球不旋转, 空气密度 $\rho = 1.21 \text{ kg/m}^3$, 空气动力黏度 $\mu = 1.81 \times 10^{-5} \text{ kg/(m} \cdot \text{s)}$. 为计算简单, 假定当雷诺数小于临界雷诺数 9.0×10^4 时, 阻力系数 $C_D = 0.40$, 否则 $C_D = 0.10$.

解: 由已知的小球参数和空气参数求出松弛时间

$$\tau = \frac{m}{3\pi D \mu} = \frac{0.04655}{3\pi \times 0.04445 \times 1.81 \times 10^{-5}} = 6139(\text{s})$$

阻力系数 C_D 与雷诺数和速度有关. 设风速为常数, 以 D 为特征长度求出雷诺数

$$Re = \frac{D}{\nu} \sqrt{(u - u_p)^2 + (v - v_p)^2 + (w - w_p)^2}$$

流场中小球的运动轨迹 · 例题

$$u_p(t) = u_p(t - \Delta t) + \frac{C_D Re}{24\tau} \left[u - \frac{u_p(t) - u_p(t - \Delta t)}{2} \right] \Delta t$$

由中心差商 $\Rightarrow v_p(t) = v_p(t - \Delta t) + \frac{C_D Re}{24\tau} \left[v - \frac{v_p(t) - v_p(t - \Delta t)}{2} \right] \Delta t$

$$w_p(t) = w_p(t - \Delta t) + \frac{C_D Re}{24\tau} \left[w - \frac{w_p(t) - w_p(t - \Delta t)}{2} \right] \Delta t - g\Delta t$$

设 $\alpha = \frac{C_D Re \Delta t}{24\tau}$, 则向量方程可改写为

$$\mathbf{V}_p(t) = \mathbf{V}_p(t - \Delta t) + \alpha \mathbf{V} - \frac{\alpha}{2} \mathbf{V}_p(t) - \frac{\alpha}{2} \mathbf{V}_p(t - \Delta t) - g\Delta t \mathbf{k}$$

或 $\mathbf{V}_p(t) = \left(\alpha \mathbf{V} - g\Delta t \mathbf{k} + \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \mathbf{V}_p(t - \Delta t) \right) / \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right)$

t 时刻小球的位置, 可用差分式给出 $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(t - \Delta t) + [\mathbf{V}_p(t - \Delta t) + \mathbf{V}_p(t)] \Delta t / 2.$

流场中小球的运动轨迹 · 例题

取时间步长 $\Delta t = 0.04 \text{ s}$, 计算结果列于表中.

t/s	$u/(\text{m/s})$	$w/(\text{m/s})$	$V/(\text{m/s})$	s_x/m	s_z/m
0.04	31.60	17.85	36.30	1.266	0.723
0.28	31.06	15.21	34.59	10.03	5.291
0.64	30.32	11.37	32.38	19.83	9.472
1.00	29.63	7.620	30.59	30.62	12.89
1.72	25.54	0.0362	25.54	50.53	15.60
2.08	23.76	-3.372	24.00	59.39	14.99
2.44	22.19	-6.559	23.14	67.66	13.19
2.76	20.91	-9.226	22.86	74.56	10.66
3.00	20.00	-11.13	22.89	79.46	8.220
3.32	18.85	-13.53	23.20	85.68	4.271
3.56	18.02	-15.23	23.59	90.11	0.818
3.60	17.88	-15.51	23.67	90.82	0.203
3.64	17.74	-15.77	23.75	91.53	-0.423

小球飞行 3.64 s 落地, 最大水平距离 91 m, 速度由 36.6 m/s 降至 23.7 m/s.

矩形管道中不可压缩流体的层流

圆管中黏性不可压缩流体层流速度剖面的解析解.

矩形管道中不可压缩流体的层流

矩形管中黏性不可压缩流体层流速度剖面的解是什么？

矩形管道中不可压缩流体的层流

现考虑等截面管道中定常层流流动, x 轴与管轴平行, 在 y, z 轴方向速度为 0, 即

$$v = 0$$

$$w = 0$$

进而由连续性方程得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

则 x 方向的 Navier-Stokes 方程可写为

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad \Leftarrow \quad \text{泊松方程}$$

式中, $\frac{\partial p}{\partial x}$ 为常数.

矩形管道中不可压缩流体的层流

现研究关于 y, z 轴对称的矩形截面管道.

取第一象限为 $1/4$ 截面, 边界条件如图所示, 沿对称轴取垂直于对称轴的速度导数为 0, 即

$$\partial u / \partial y = 0, \quad \partial u / \partial z = 0$$

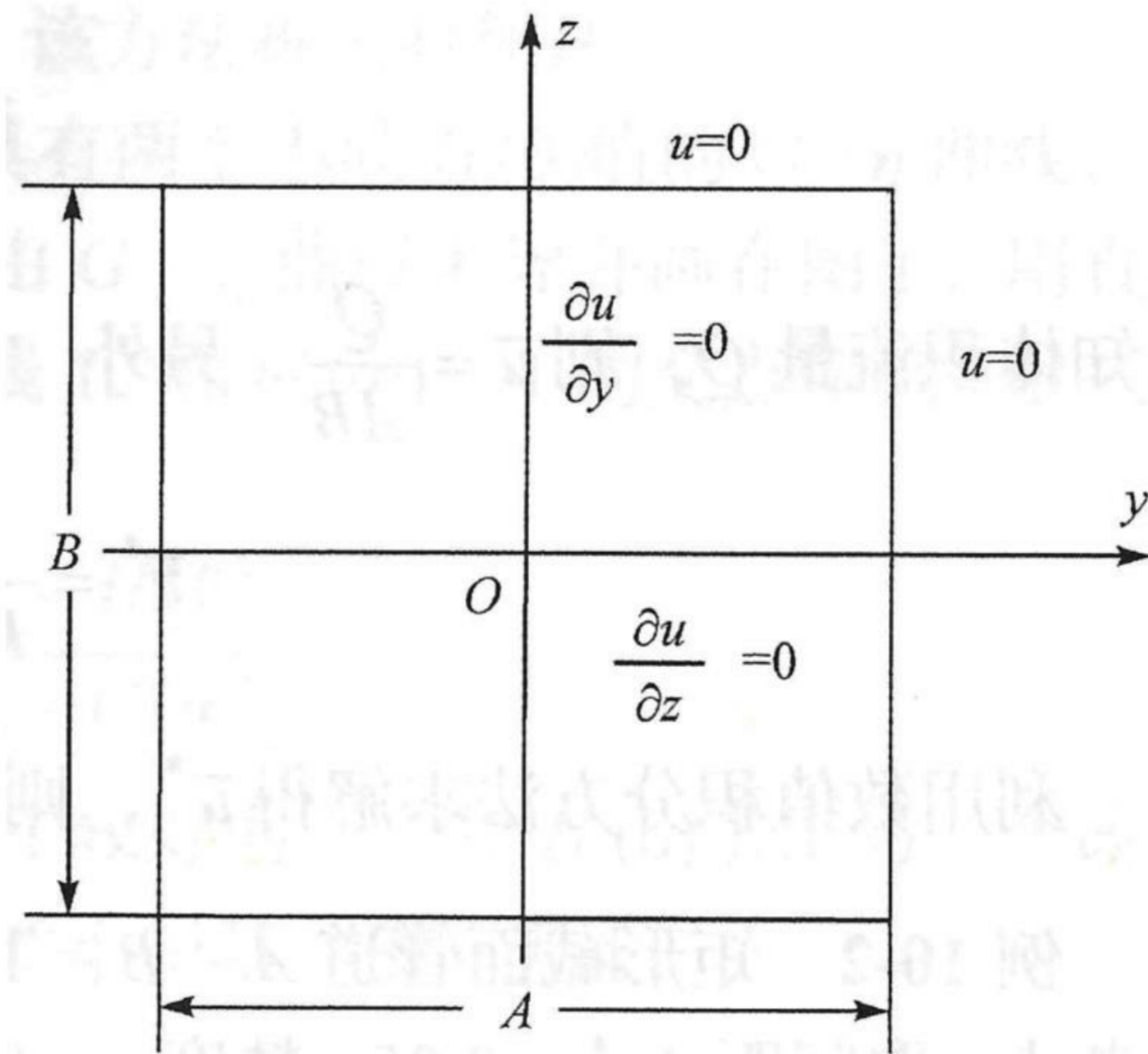
引入无量纲变量

$$y^* = \frac{y}{\frac{A}{2}}, \quad z^* = \frac{z}{\frac{B}{2}}, \quad u^* = \frac{\mu u}{\left(\frac{A}{2}\right)^2 \left(-\frac{dp}{dx}\right)}$$

将量纲一变量引入泊松方程, 有

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} = -1$$

式中, $0 \leq y^* \leq 1, 0 \leq z^* \leq B/A$.



矩形管道中不可压缩流体的层流

利用求二阶导数的三点公式, 将上面的方程改写成差分格式, 有

$$\frac{u_{i-1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i+1,j}^*}{\Delta z^{*2}} + \frac{u_{i,j-1}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i,j+1}^*}{\Delta y^*} = -1$$

经整理, 求出 $u_{i,j}^*$ 表达式

$$u_{i,j}^* = \frac{\left(\frac{\Delta z^*}{\Delta y^*}\right)^2 (u_{i,j-1}^* + u_{i,j+1}^*) + (u_{i-1,j}^* + u_{i+1,j}^*) + \Delta y^{*2}}{2 \left[1 + \left(\frac{\Delta z^*}{\Delta y^*}\right)^2 \right]}$$

令 $\Delta z^* = \Delta y^*$, 有

$$u_{i,j}^* = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^* + u_{i,j+1}^* + u_{i-1,j}^* + u_{i+1,j}^* + \Delta y^{*2})$$

矩形管道中不可压缩流体的层流

利用求二阶导数的三点公式, 将上面的方程改写成差分格式, 有

$$\frac{u_{i-1,j}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i+1,j}^*}{\Delta z^{*2}} + \frac{u_{i,j-1}^* - 2u_{i,j}^* + u_{i,j+1}^*}{\Delta y^*} = -1$$

经整理, 求出 $u_{i,j}^*$ 表达式

$$u_{i,j}^* = \frac{\left(\frac{\Delta z^*}{\Delta y^*}\right)^2 (u_{i,j-1}^* + u_{i,j+1}^*) + (u_{i-1,j}^* + u_{i+1,j}^*) + \Delta y^{*2}}{2 \left[1 + \left(\frac{\Delta z^*}{\Delta y^*}\right)^2 \right]}$$

令 $\Delta z^* = \Delta y^*$, 有

$$u_{i,j}^* = \frac{1}{4} (u_{i,j-1}^* + u_{i,j+1}^* + u_{i-1,j}^* + u_{i+1,j}^* + \Delta y^{*2})$$

下面考虑边界条件, 即: 第一象限 $1/4$ 截面的边界条件.

矩形管道中不可压缩流体的层流

在右、上边界

$$u = 0, \quad u^* = 0$$

在左、下边界

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

同时

$$\frac{\partial u^*}{\partial y^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0$$

对应的差分方程为

$$\frac{u_{i,1}^* - u_{i,2}^*}{\Delta y^*} = 0, \quad \frac{u_{1,j}^* - u_{2,j}^*}{\Delta z^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{i,1}^* = u_{i,2}^*, \quad u_{1,j}^* = u_{2,j}^*$$

显然在对称边界上 u^* 值是未知的, 但对称边界不改变总的未知数的数目, 求解过程也无大的变化, 只需考虑上式提供的条件.

矩形管道中不可压缩流体的层流

注意到 u 的平均值

$$\bar{u} = -\frac{dp}{dx} \frac{A^2}{4\mu} \bar{u}^*$$

又由体积流量 Q 表达式, 即

$$\bar{u} = \frac{Q}{AB}$$

可得的 $\bar{u}^*$, $\frac{dp}{dx}$ 与 Q 的关系. 同时, 将

$$\bar{u}^* = \frac{1}{B/A} \int_0^{B/A} \int_0^1 u^* dy^* dz^*$$

用数值积分方法求解得 $\bar{u}^*$.

当已知体积流量 Q 时, 即可得到 $\frac{dp}{dx}$ 的值, 最终根据 $u_{i,j}^*$ 求出 $u_{i,j}$.

矩形管道中不可压缩流体的层流 · 例题

例 2: 矩形截面管道 $A = B = 1 \text{ m}$, 将整个管道截面分成 10 等份, 共有 $11 \times 11 = 121$ 个节点. 取间距 $\Delta y^* = 0.05$, 精度 $\varepsilon = 0.001$, 计算 $1/4$ 截面内 $5 \times 5 = 25$ 个节点上的量纲一速度 $u_{i,j}^*$ 的值.

解:

矩形管道中不可压缩流体的层流 · 例题

例 2: 矩形截面管道 $A = B = 1 \text{ m}$, 将整个管道截面分成 10 等份, 共有 $11 \times 11 = 121$ 个节点. 取间距 $\Delta y^* = 0.05$, 精度 $\varepsilon = 0.001$, 计算 $1/4$ 截面内 $5 \times 5 = 25$ 个节点上的量纲一速度 $u_{i,j}^*$ 的值.

解: 计算结果如下表所示.

0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.113	0.111	0.101	0.083	0.052	0.000
0.193	0.188	0.170	0.173	0.083	0.000
0.245	0.239	0.215	0.170	0.101	0.000
0.274	0.266	0.239	0.188	0.111	0.000
0.281	0.274	0.245	0.193	0.113	0.000

平板层流边界层的布拉修斯解

平板层流边界层的布拉修斯公式可写为

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0$$

式中, f 是 $\eta = \frac{y}{g(x)}$ 的函数

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}}$$

式中, ψ 为流函数; U 为来流速度; x 为长度坐标.

边界条件为

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = 1$$

将布拉修斯公式改写为等价的一阶微分方程组

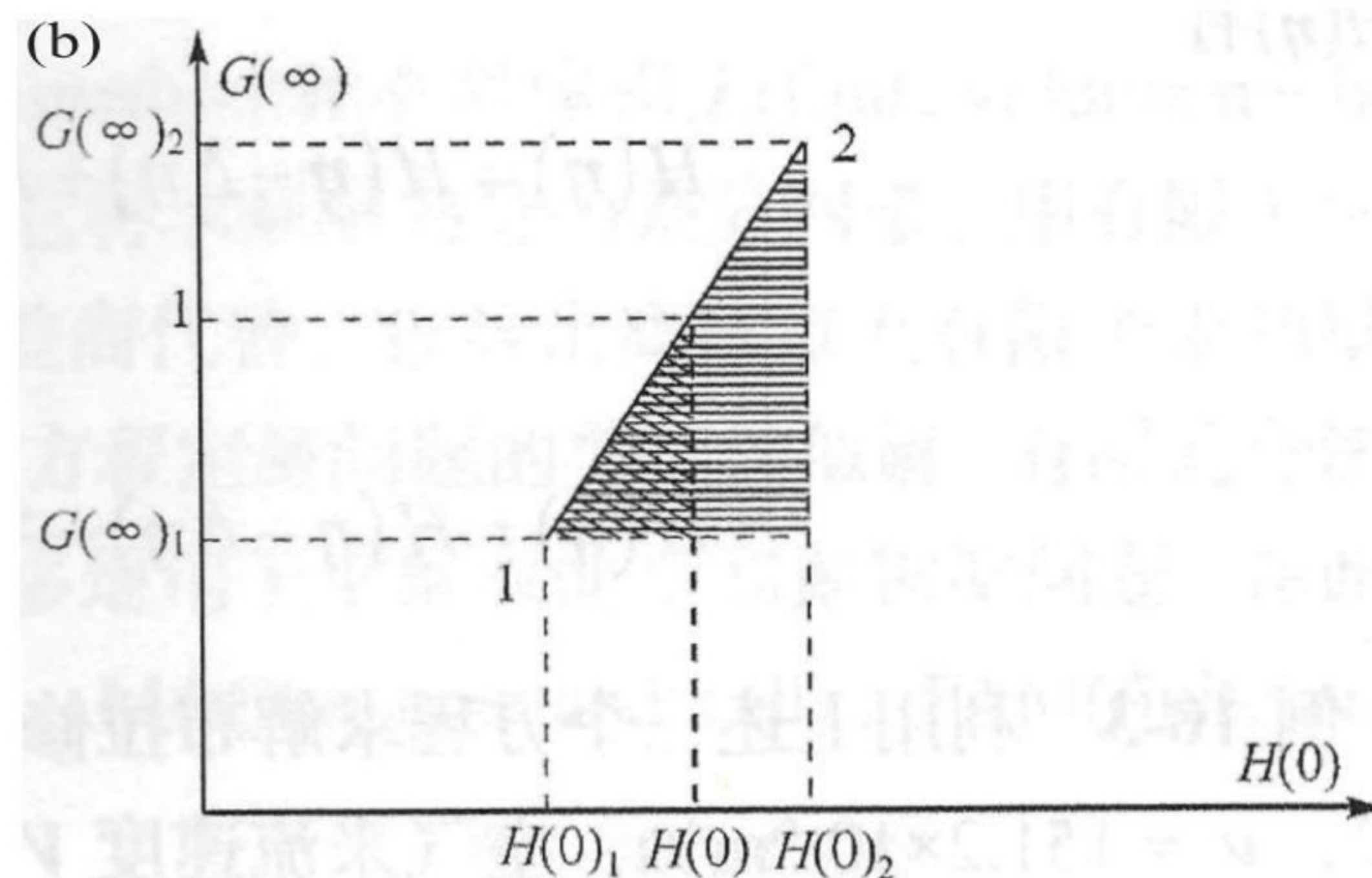
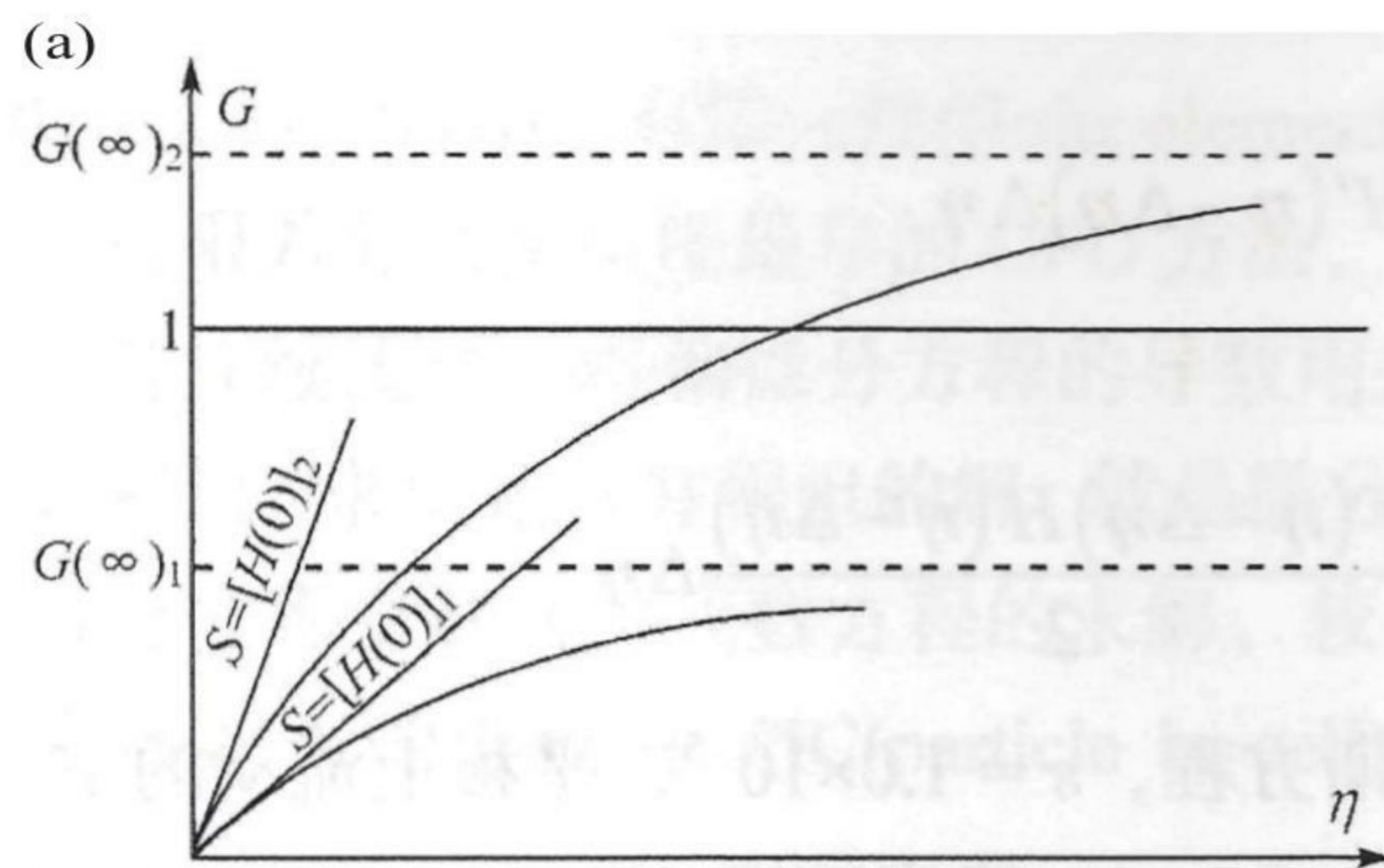
$$\begin{cases} f' = G \\ G' = H \\ H' = fH/2 \end{cases}$$

平板层流边界层的布拉修斯解

边界条件 $f(0) = 0$ 仍保留, $f'(0) = 0$, 即 $G(0) = 0$; 而 $f'(\infty) = 1$, 即 $G(\infty) = 1$.

这样上面的方程组对 f 和 G 存在初始条件, 但 $H(0)$ 未知. 通过选择 $H(0)$ 就可将它当作初值问题来处理. $\Leftarrow$ 采用**打靶法**求解

为使猜测值 $H(0)$ 更系统、更有效, 考虑两条具有两个不同 $H(0)$ 值的 $G - \eta$ 曲线.



平板层流边界层的布拉修斯解

$H(0)$ 代表曲线原点的斜率, $G(\infty)$ 值由 $G - \eta$ 曲线求导并画在图上.

用直线连接点 1 和点 2, $H(0)$ 的希望值 $\bar{H}(0)$ 就可通过直线 12 和 $G(\infty) = 1$ 的交点得到.

由三角形相似原理, 有

$$\frac{\bar{H}(0) - H(0)_1}{1 - G(\infty)_1} = \frac{H(0)_2 - H(0)_1}{G(\infty)_2 - G(\infty)_1}$$

利用 $H(0)_1$ 和 $\bar{H}(0)$ 求 $H(0)$, 再用 $H(0)_1$ 和 $H(0)_2$ 中较好的一个和 $H(0)$ 求出另一个改进值 $H(0)_k$.

重复上面的过程, 直到两次计算结果的差小于某一值 ε 为止.

$$\frac{H(0)_{k+1} - H(0)_k}{H(0)_k} \leq \varepsilon$$

平板层流边界层的布拉修斯解

现在的问题是对任意给定的 $H(0)$ 值怎样求 $G(\infty)$ 值.

注意到

$$u(x, y) = U f' = G(\eta)$$

式中, $G(\eta)$ 是由层流边界层流动而定的相似速度剖面. 理论上, 当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow U$, 因此 $G(\infty) = 1$.

事实上当 η 趋于边界层外缘时, $u(x, y) \rightarrow U$, 故可用 η 的有限值而不必用无穷.

由于

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}}$$

层流边界层厚度的近似值为

$$\delta = \sqrt{\frac{30 \nu x}{U}}$$

平板层流边界层的布拉修斯解

当 $y = \delta$ 时, 有

$$\eta = y \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \sqrt{\frac{30\nu x}{U}} \sqrt{\frac{U}{\nu x}} = \sqrt{30} \approx 6 \quad \Rightarrow \quad G(\eta) = G(6) \approx G(\infty) = 1$$

作为 $H(0)$ 的初始估计, 假定 $G(\eta)$ 是从 $G(0) = 0$ 到 $G(6) = 1$ 的直线, 斜率为 $1/6$.
这是斜率 $H(0)$ 的第一个估计值 $H(0)_1 = 1/6$, 第二个估计值是 $H(0)_2 = 1/6 + 1/10$.

对 $f(\eta)$ 和 $G(\eta)$ 用中心差分格式建立方程

$$\Rightarrow \begin{aligned} f(\eta) &= f(\eta - \Delta\eta) + \frac{G(\eta - \Delta\eta) + G(\eta)}{2} \Delta\eta \\ G(\eta) &= G(\eta - \Delta\eta) + \frac{H(\eta - \Delta\eta) + H(\eta)}{2} \Delta\eta \end{aligned}$$

对 $H(\eta)$ 有

$$H(\eta) = H(\eta - \Delta\eta) + H'(\eta - \Delta\eta) \Delta\eta \quad \text{或}$$

$$H(\eta) = H(\eta - \Delta\eta) - f(\eta - \Delta\eta) H(\eta - \Delta\eta) \Delta\eta / 2$$

平板层流边界层的布拉修斯解 · 例题

例 3: 利用上述三个方程求解布拉修斯方程, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-5}$, 平板上流动的空气为 15°C , $\nu = 151.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 空气来流速度 $V = 6.1 \text{ m/s}$. 确定速度 $U(y)$ 在 $x = 0.915 \text{ m}$ 处的速度剖面 $G(\eta)$ 和 H . 取 201 个网格点.

解:

平板层流边界层的布拉修斯解 · 例题

例 3: 利用上述三个方程求解布拉修斯方程, $\varepsilon = 1.0 \times 10^{-5}$, 平板上流动的空气为 15°C , $\nu = 151.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, 空气来流速度 $V = 6.1 \text{ m/s}$. 确定速度 $U(y)$ 在 $x = 0.915 \text{ m}$ 处的速度剖面 $G(\eta)$ 和 H . 取 201 个网格点.

解:

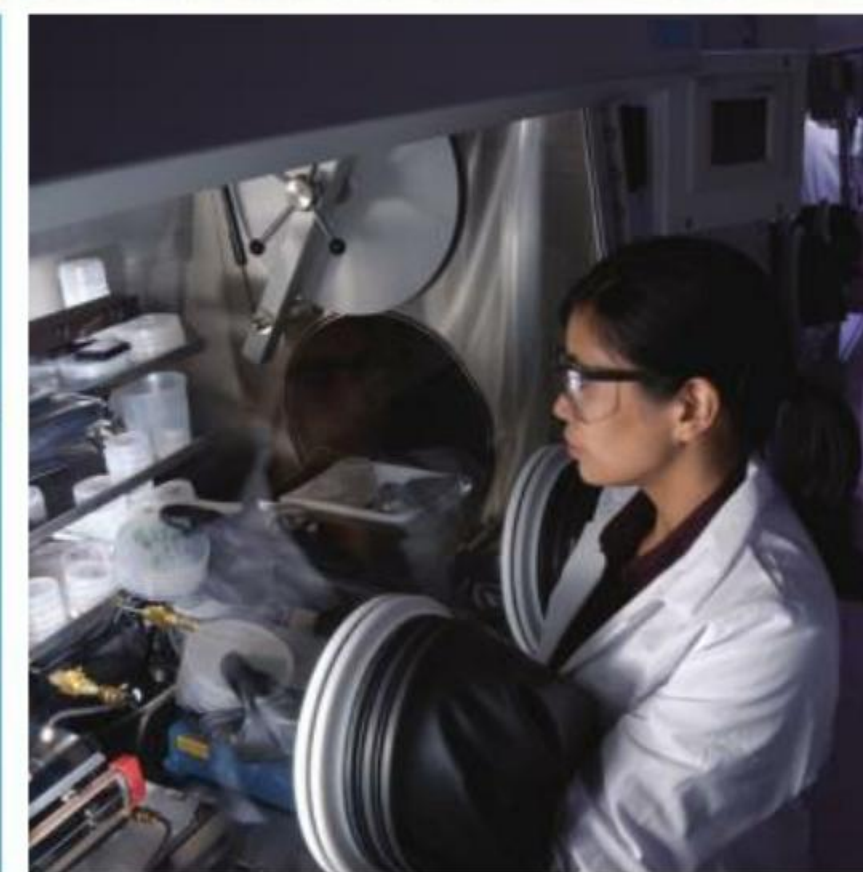
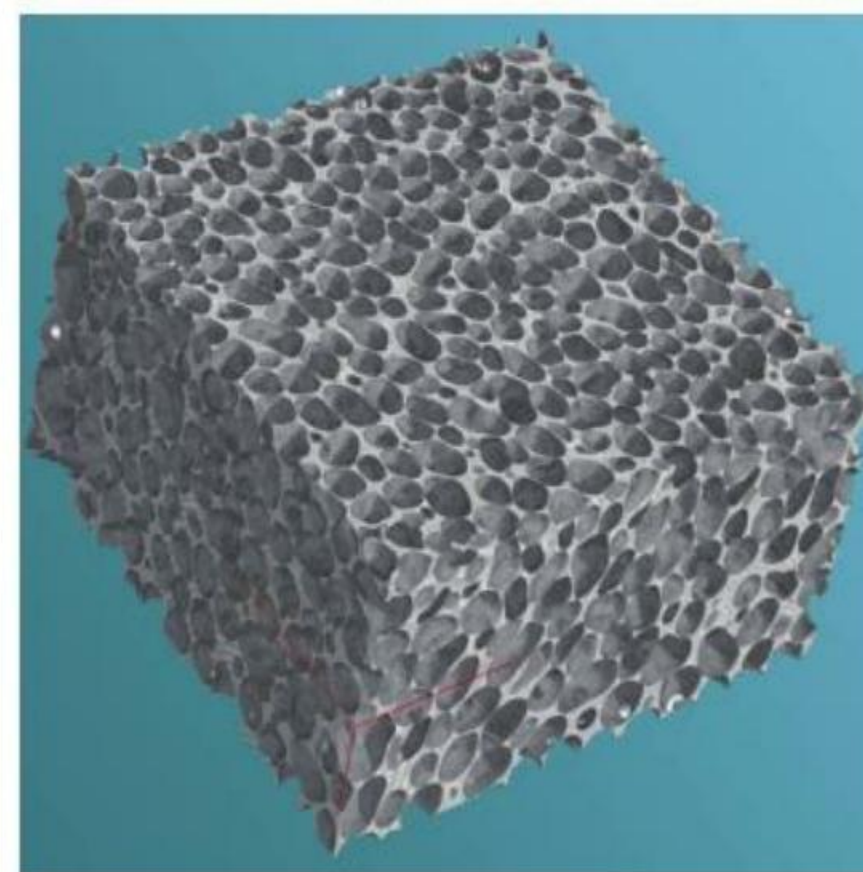
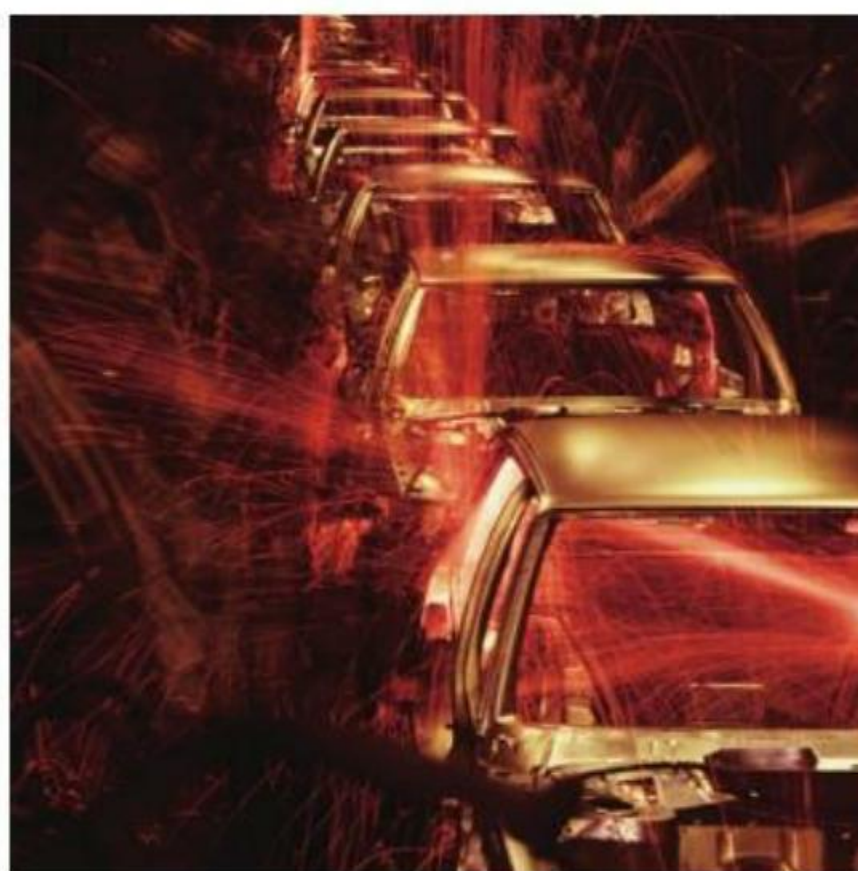
网格点	η	F	G	H
1	0.00	0.000	0.000	0.000
11	0.30	0.01493	0.09951	0.33155
21	0.60	0.05969	0.19879	0.32993
41	1.20	0.2378	0.39365	0.31686
61	1.80	0.5294	0.57495	0.28372
81	2.40	0.9224	0.72974	0.22913
101	3.00	1.3976	0.84738	0.16216
121	3.60	1.9312	0.92499	0.09832
141	4.20	2.5007	0.96859	0.050256
161	4.80	3.0889	0.98920	0.021444
181	5.40	3.6853	0.99733	0.007594
201	6.00	4.2846	1.00000	0.003224

提纲

- ① 计算流体力学的基本概念
- ② 流体力学方程的离散方法
 - 数值微分
 - 数值积分
 - 有限差分法
- ③ 流体力学问题数值求解算例
 - 流场中小球的运动轨迹
 - 矩形管道中不可压缩流体的层流
 - 平板层流边界层的布拉修斯解
- ④ 当代计算流体力学的新进展
 - 计算流体力学分支
 - 湍流问题数值模拟
 - 格子玻尔兹曼方法简介
- ⑤ 计算流体力学发展前景展望
- ⑥ 总结与思考

当代计算流体力学的新进展

- ① 20 世纪 70 年代, CFD 求解的问题被限制在二维流动的范围内, 而流体动力机械 (涡轮机、压缩机、飞行器、航运器) 所处的真实世界都是三维的.



- ② 20 世纪 90 年代以后, 这种情况有了实质性改变. 现代 CFD 计算三维流动的程序已经成为工业标准, 成为设计过程的常用工具.

计算流体力学分支

当代 CFD 技术, 从算法上大体可分为三种:

- ① 有限差分法 (FDM, Finite Difference Method)、
- ② 有限元法 (FEM, Finite Element Method)、
- ③ 有限体积法 (FVM, Finite Volume Method).

有限差分法的基本思想

有限差分法是应用最早的 CFD 方法, 它将求解域划分为差分网格, 用有限个网格节点代替连续流场, 将偏微分方程的导数用差商代替, 推导出离散点上有限个未知量的差分方程组. 求出差分方程组的解, 就是微分方程定解问题的数值近似解.

有限差分法直接将求解微分方程变为求解代数方程, 多用于求解双曲和抛物方程.

计算流体力学分支

有限元法的基本思想

有限元法吸收了有限差分法中离散处理的内核, 又采用了变分计算中选择逼近函数对区域进行积分的合理方法.



在 CFD 领域, 有限元法因求解速度较慢, 应用并不广泛.

有限体积法的基本思想

有限体积法是将求解域划分为一系列控制体积, 将微分方程对每个控制体积积分得出离散方程. 在导出离散方程的过程中, 需要对界面上的被求函数及其导数做出某种形式的假定.



有限体积法导出的离散方程具有守恒特性, 其物理意义明确、计算量小、应用广泛.

湍流问题数值模拟

湍流研究的最终目的是在理论的指导下成功预测和控制湍流, 解决工程实际问题.

- ① 从经典统计理论到计算机直接数值模拟,
- ② 从热线风速仪的单点速度脉动测量到湍流脉动场的粒子图像测速法,
- ③ 从简单湍流流动的涡粘模型到复杂流动的精细模型,

在探索湍流的历程中, 人们创造了先进的研究手段, 设计出各种精细的流动及其流场测量的实验方法。

同时, 人们有效利用计算机技术和近代数学工具的数值模拟方法, 使湍流研究在近代有了长足进步.

湍流数值模拟方法可以分成两大类

- ① 直接数值模拟 (Direct Numerical Simulation, DNS),
- ② 非直接数值模拟, 包含: 大涡模拟 (Large Eddy Simulation, LES)、雷诺平均模拟 (Reynolds Average Numerical Simulation, RANS)、分离涡模拟 (Detached Eddy Simulation, DES)等.

湍流问题数值模拟 · 直接数值模拟

直接数值模拟

直接用瞬时的 N-S 方程对湍流进行计算, 无需对湍流流动作任何简化和假定, 理论上可得相对准确的计算结果.

► 如下问题:

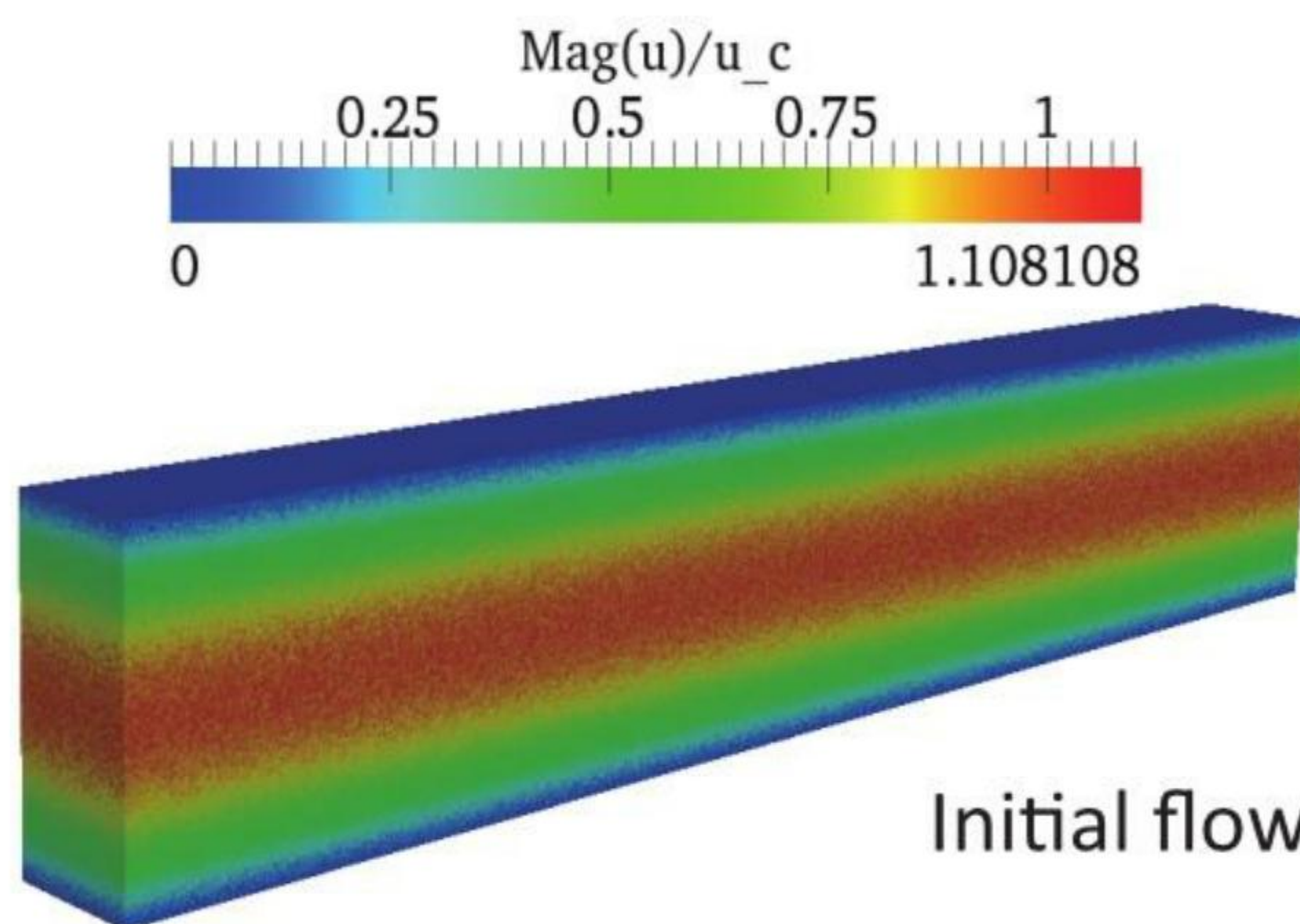
在一个 0.01 m^2 的正方形流动区域内, 高雷诺数的湍流中包含尺度为 $10 \sim 100 \mu\text{m}$ 的涡, 要描述所有尺度的涡, 计算网格的节点数将达到 $10^9 \sim 10^{12}$. 同时湍流的脉动频率约为 10kHz , 必须将时间步长取为 10^{-4} s 以下.

困难在于: 只有在这么小的时空步长下才能分辨出湍流的空间结构和时变特性!

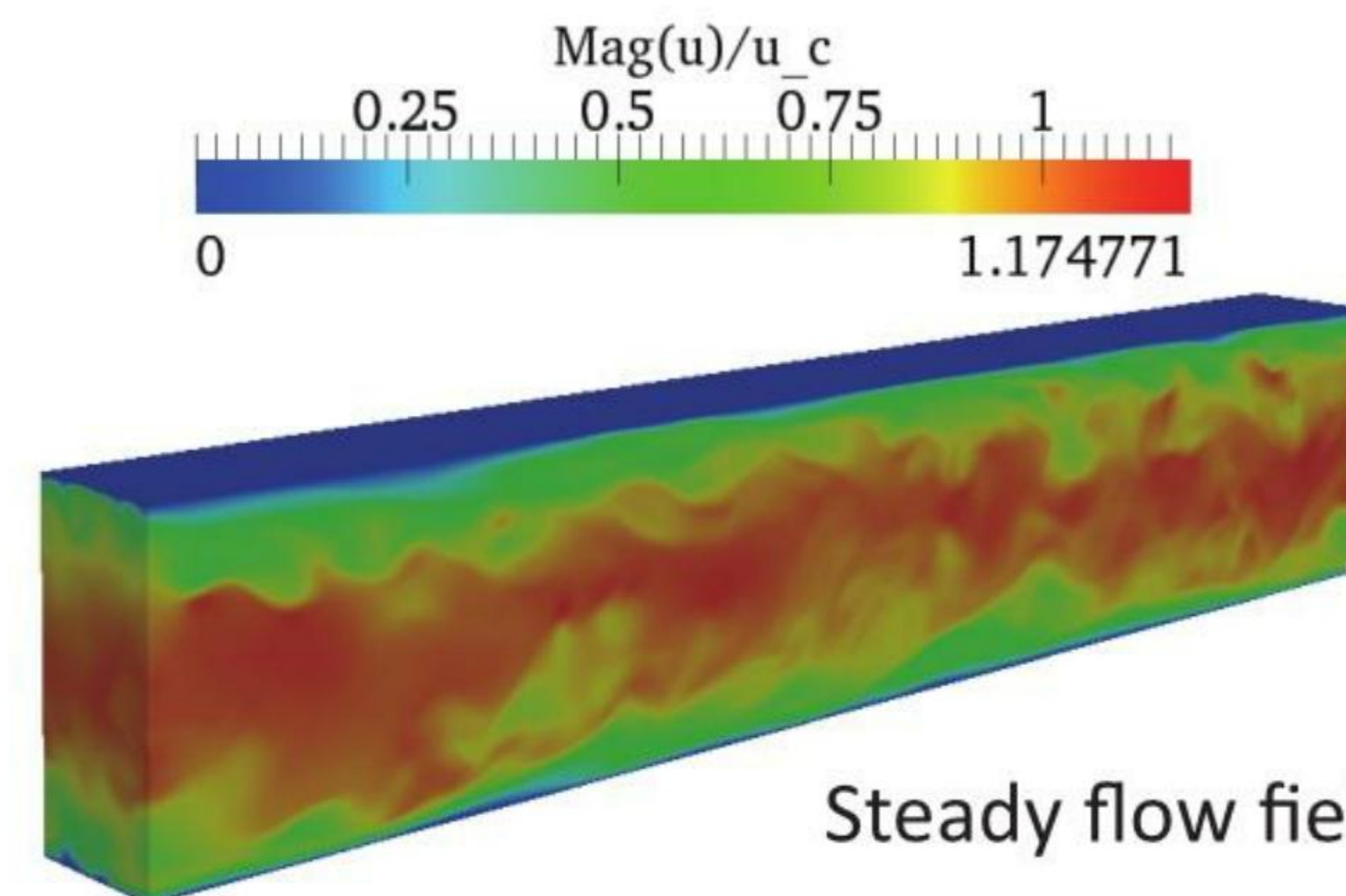
► 这就对计算机的内存及运算速度提出了很高的要求, 以目前的计算机性能来看, 直接数值模拟尚不能广泛投入工程应用.

湍流问题数值模拟 · 直接数值模拟

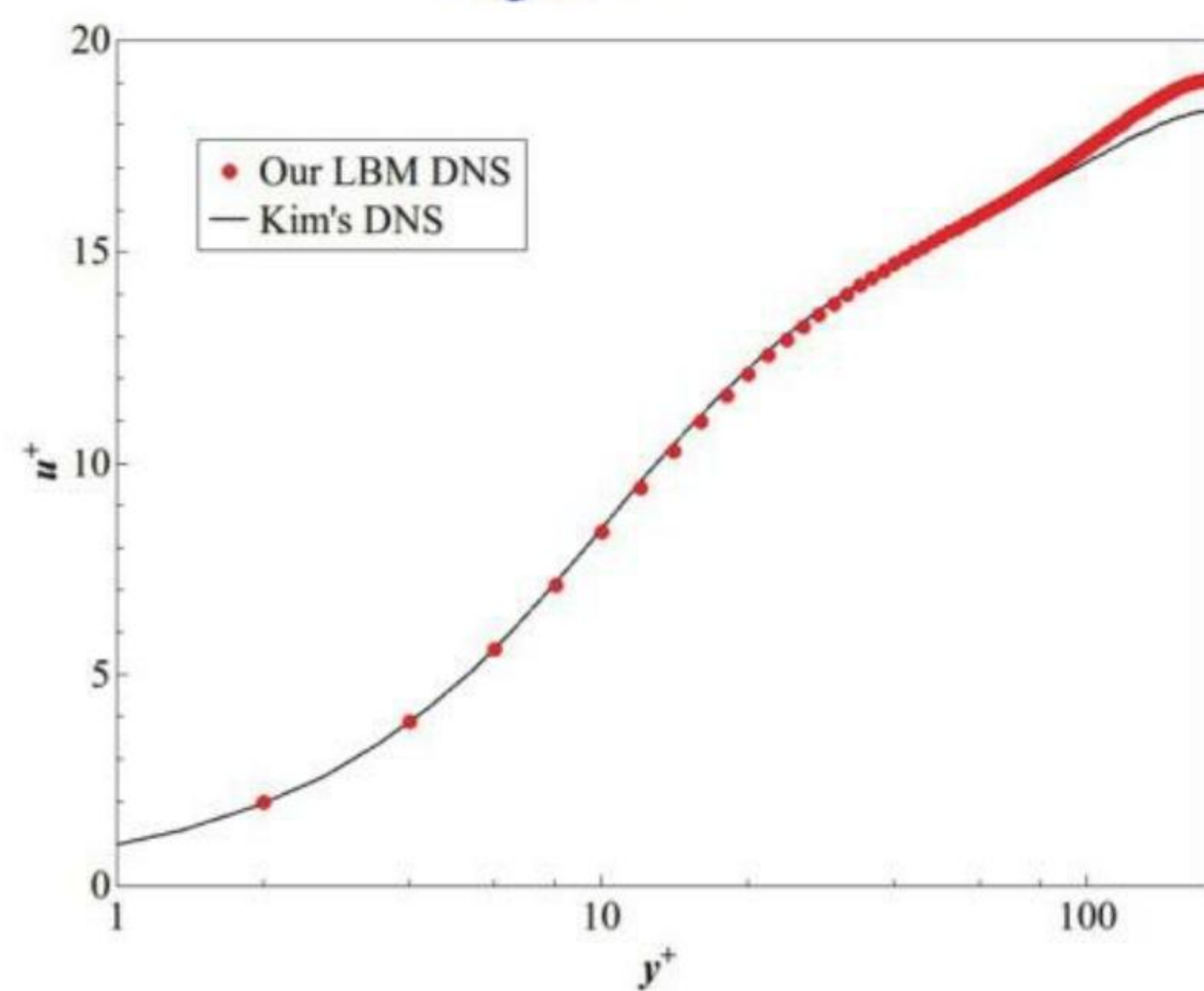
- The Lattice Boltzmann Method: $Re = 2300$, 平直通道内充分发展湍流



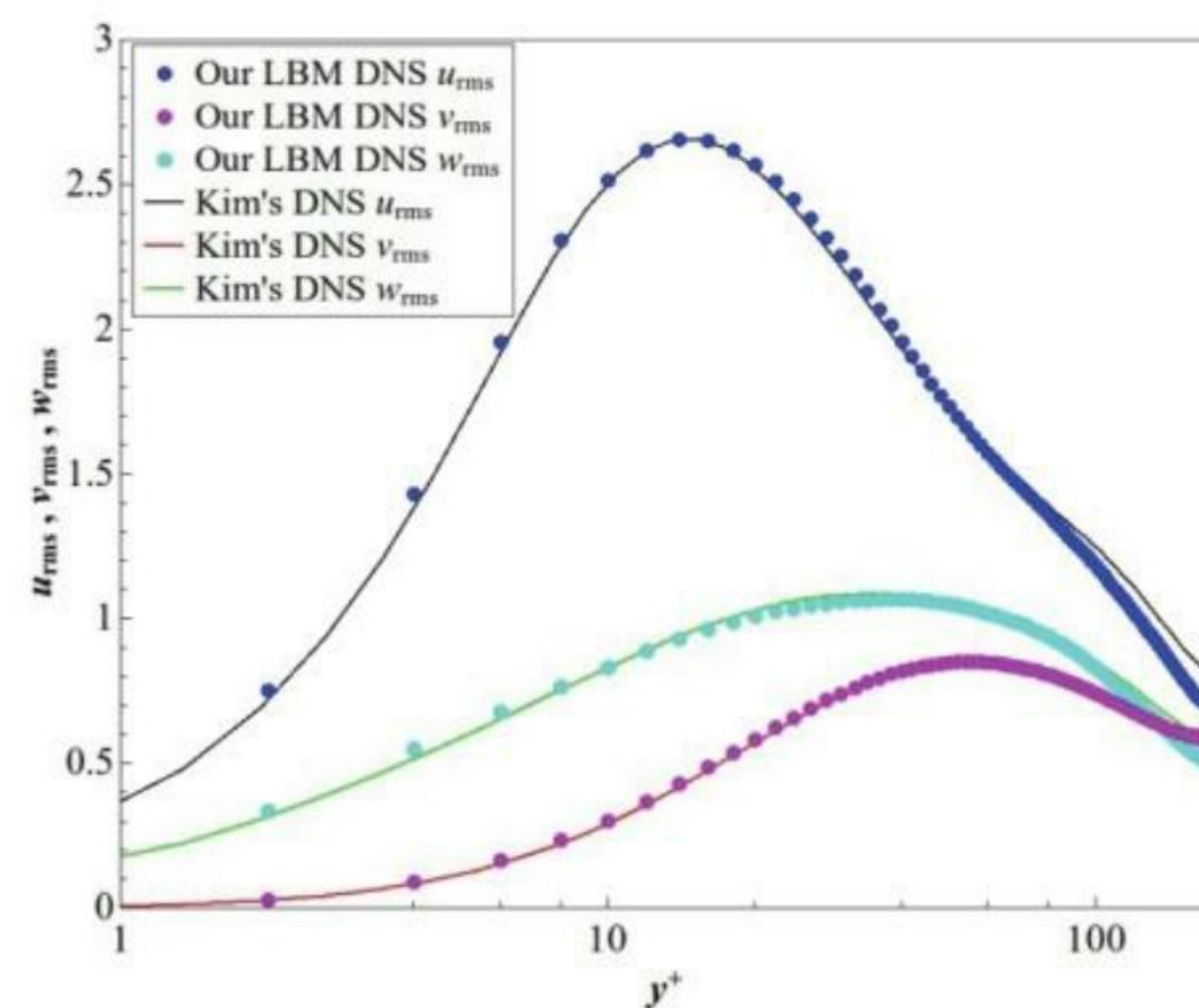
Initial flow field



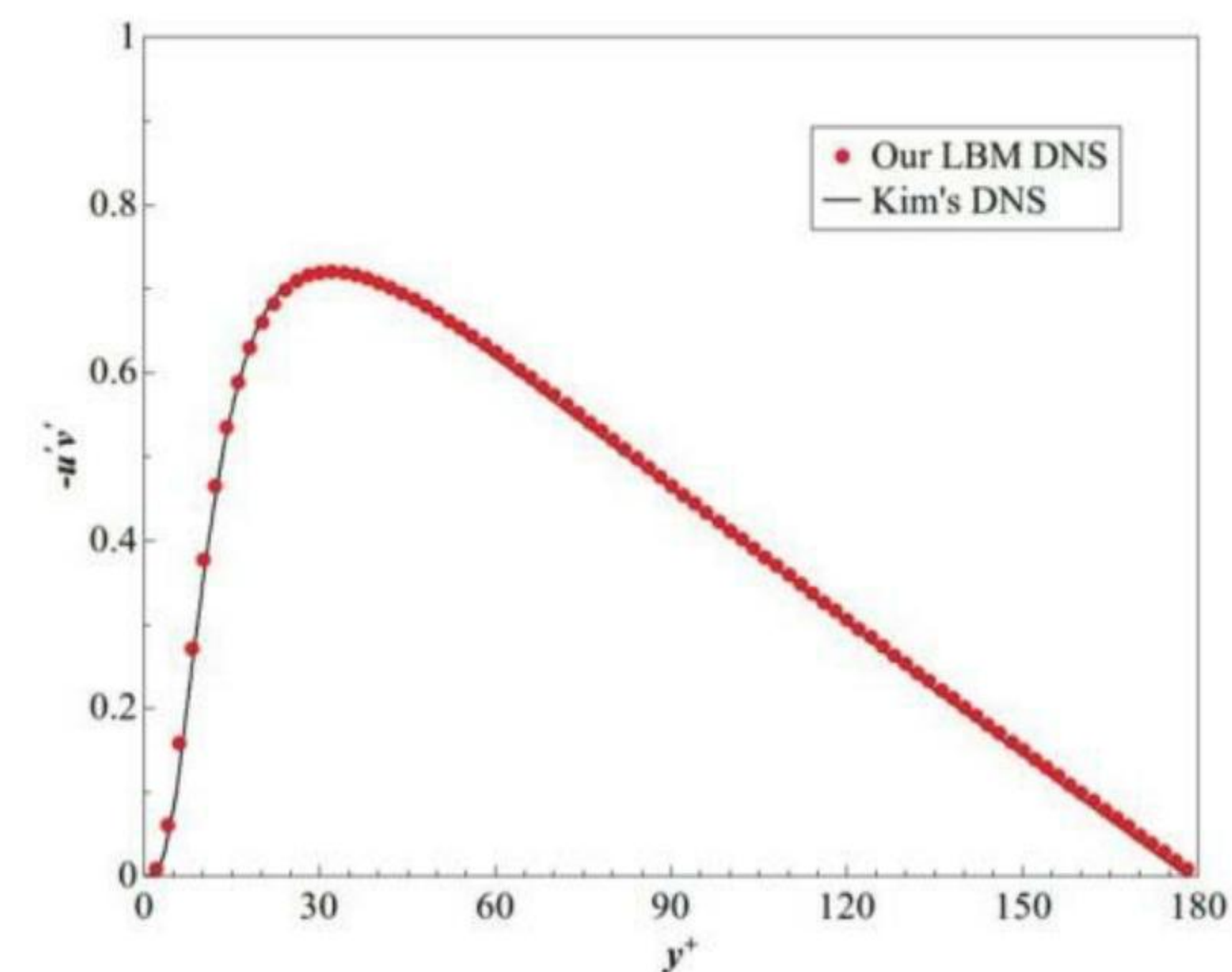
Steady flow field



Flow velocity



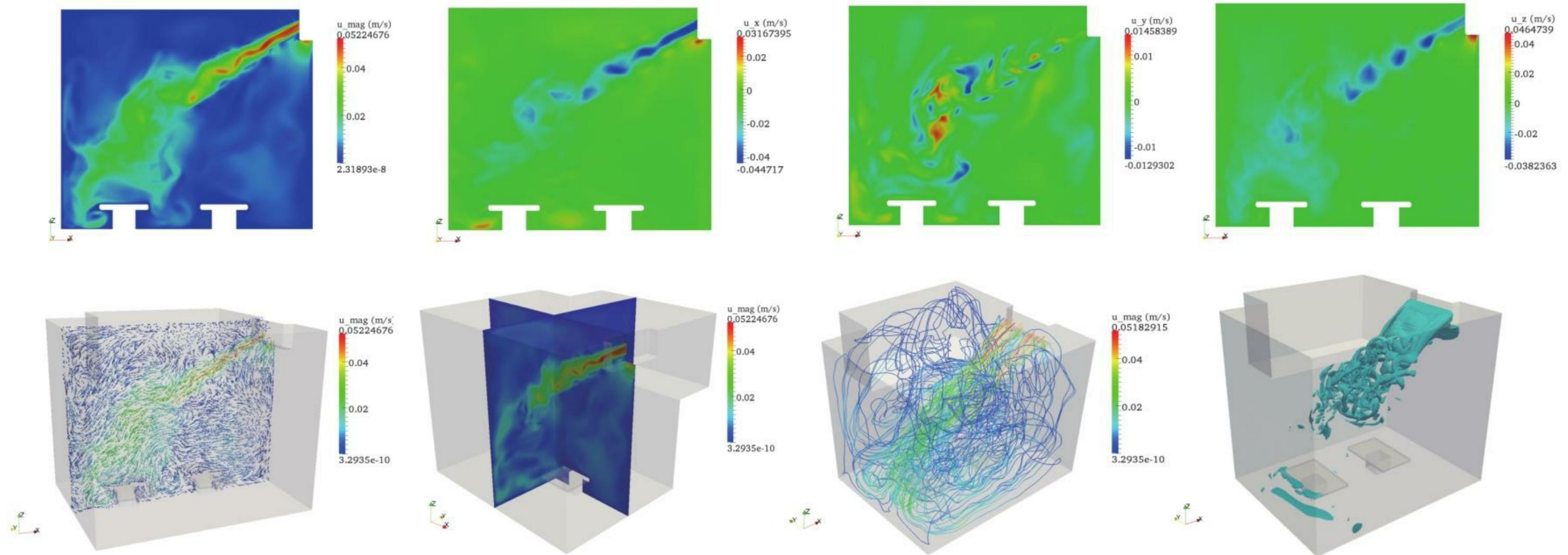
Normal stress



Shear stress

湍流问题数值模拟 · 直接数值模拟

- The Lattice Boltzmann Method: Flow and Temperature fields inside a room. The computational domain is taken inside a room with a loft. $T_0 = 30^\circ\text{C}$.



The purpose is to obtain the T -field in the room after a long enough period of time.

湍流问题数值模拟 · 雷诺平均模拟

许多流体力学研究和数值模拟的结果表明, 虽然瞬时的 N-S 方程可以用于描述湍流, 但其非线性使得用解析的方法精确描述二维时间相关的全部细节极端困难.

雷诺平均模拟方法的提出

从工程实践的角度来说, 重要的是湍流所引起的整体的效果, 即平均流场的变化, 由此产生了基于求解雷诺时均方程及关联量输运方程的湍流模拟方法, 即湍流的雷诺平均模拟方法.

雷诺平均模拟只计算平均运动, 不需要计算各种尺度的湍流脉动. 因此, 它的空间分辨率要求低, 计算工作量小.

然而, 它只能提供湍流的平均信息. 这对于近代自然环境的预报和工程设计是远远不够的.

湍流问题数值模拟 · 大涡模拟

大涡模拟的主要思想

把包括脉动运动在内的湍流瞬时运动通过某种滤波方法分解成大尺度运动和小尺度运动两部分：大尺度量通过数值求解运动微分方程直接计算出来，小尺度量对大尺度量的影响将通过建立模型来模拟。

这种新方法的优点是：

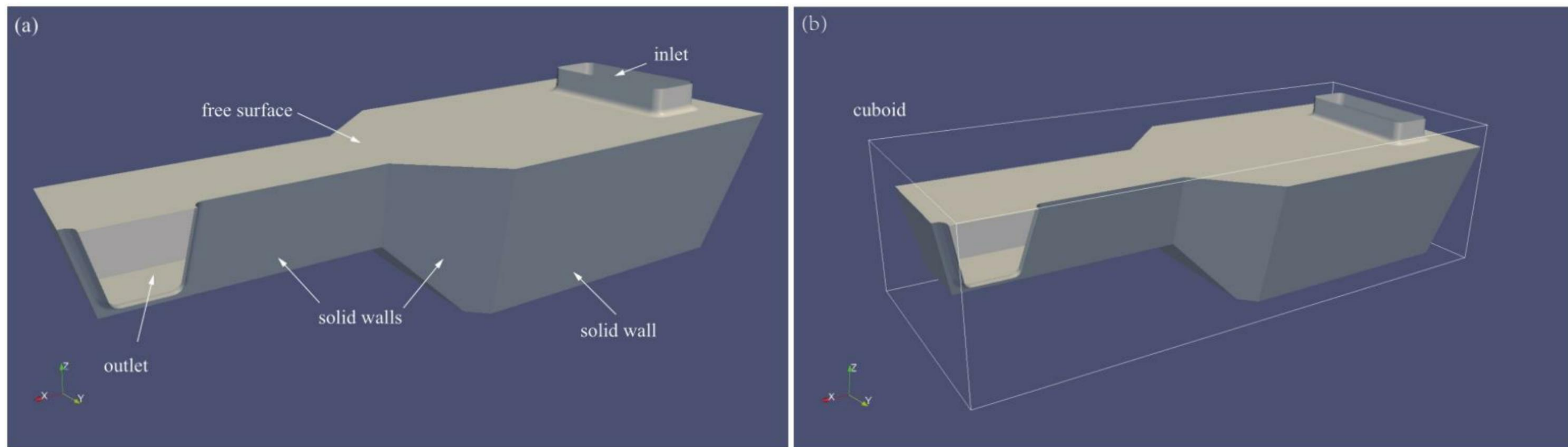
- ① 对空间分辨率的要求远小于直接数值模拟方法；
- ② 在现有的计算机条件下，可以模拟较高雷诺数和较复杂的湍流运动；
- ③ 另外，它可以获得比雷诺平均模拟更多的湍流信息。

例如，大尺度的速度和压强脉动，这些动态信息对于自然环境预报和工程设计是非常重要的。

湍流问题数值模拟 · 大涡模拟

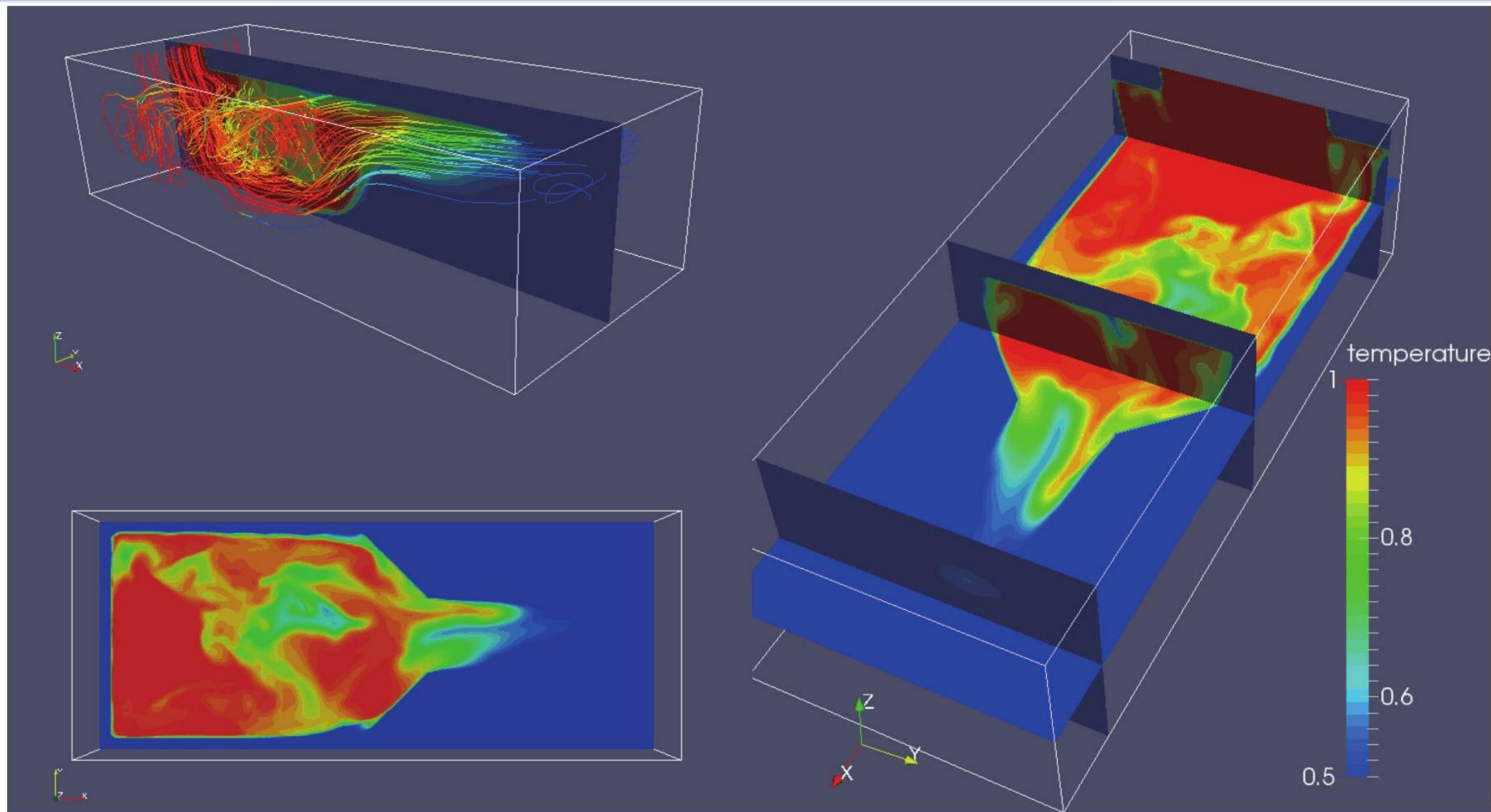
■ The Lattice Boltzmann Method: Flow and Temperature fields in a tundish cup.

The computational domain for the flow field can be regarded as a polyhedron with an inlet and an outlet, as shown in figure (a). The polyhedron is placed in a cuboid domain to carry out the simulation, as shown in figure (b).



The purpose is to obtain the T -field in the tundish cup after a long period of time.

湍流问题数值模拟 · 大涡模拟



湍流问题数值模拟 · 大涡模拟

大涡模拟方法适用于平面射流、圆柱、方柱绕流、翼型绕流、湍流燃烧、槽道流、管道内流、平面尾迹流以及气固两相流等众多领域。

大涡模拟方法具有适用性强、模拟精度高等优点。

从 20 世纪 90 年代开始, 大涡数值模拟方法已成为湍流数值模拟的前沿课题。

大涡模拟有以下局限:

- ① 针对高雷诺数流动提出, 并不适用于低雷诺数模型, 无法准确模拟壁面区域的流动;
- ② 由于大涡模拟对网格精度要求高, 需要在超级计算机或是网络机群的并行环境下进行, 使它难以得到广泛应用;
- ③ 为了避免产生假扩散现象, 至少需要二阶精度的离散格式, 大大增加了计算机的负担。

湍流问题数值模拟 · 分离涡模拟

分离涡模拟技术的提出

分离涡模拟是一种面向工业应用的复合湍流模型, 主要用于解决雷诺平均数值模拟无法精确提供固定壁面边界上的复杂非稳定分离湍流, 以及大涡数值模拟在模拟低雷诺数近壁面区域流动的不足.

分离涡模拟的主要思想

在低雷诺数的近壁面区域采用雷诺平均数值模拟, 而在远壁面采用大涡数值模拟. 分离涡模拟最重要环节是如何适当选取合适的壁面区特征长度.

分离涡模拟被认为是最具有前景的工程湍流模拟手段之一, 已被广泛地应用于航空航天和军事等高新高尖领域.

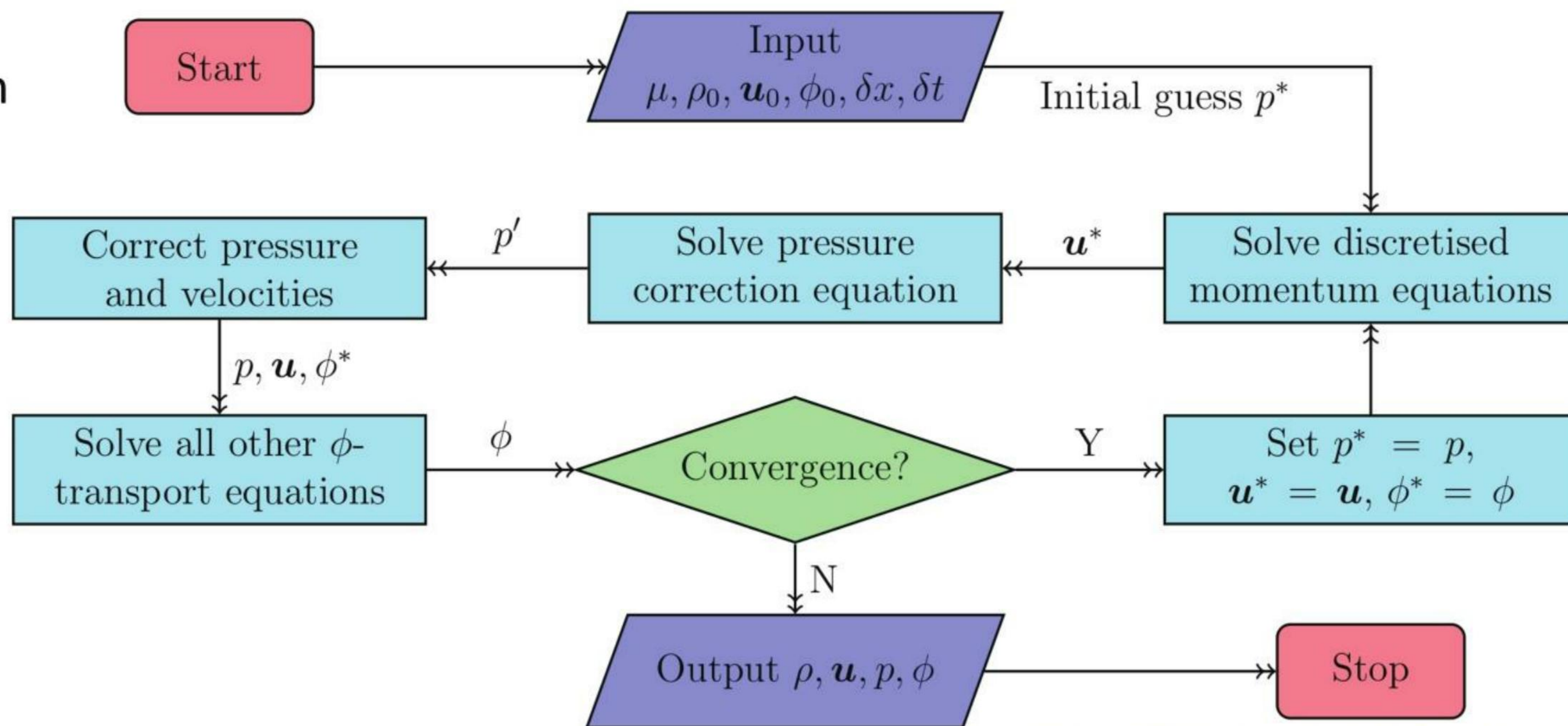
格子玻尔兹曼方法简介 · 传统方法

■ The Navier-Stokes Equation Solving Method



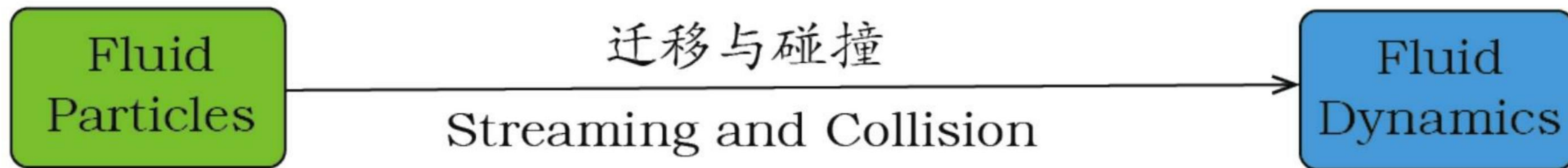
The **SIMPLE** algorithm
by
Patankar & Spalding
(1972)

A **guess-and-correct**
procedure for the
calculation of pressure
on the **staggered grid**
arrangement.



格子玻尔兹曼方法简介 · 介观方法

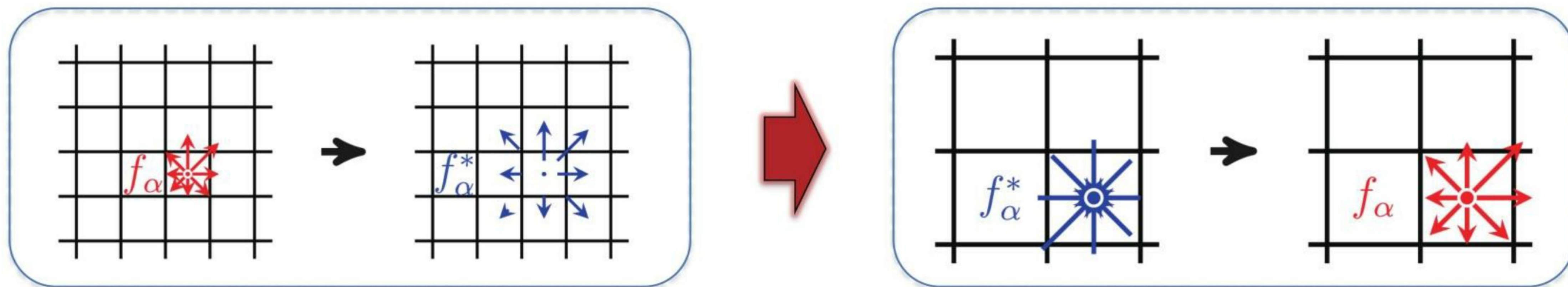
■ The Lattice Boltzmann Method



One Equation, Multiple Physics (McNamara & Zanetti 1988, YH Qian 1992).

$$f_i(\mathbf{x} + \mathbf{c}_i \delta t, t + \delta t) - f_i(\mathbf{x}, t) = \Omega_i(f(\mathbf{x}, t))$$

The General **lattice Boltzmann** Steps: Streaming → Relaxation



格子玻尔兹曼方法简介 · 思想方法

■ The Lattice Boltzmann Method



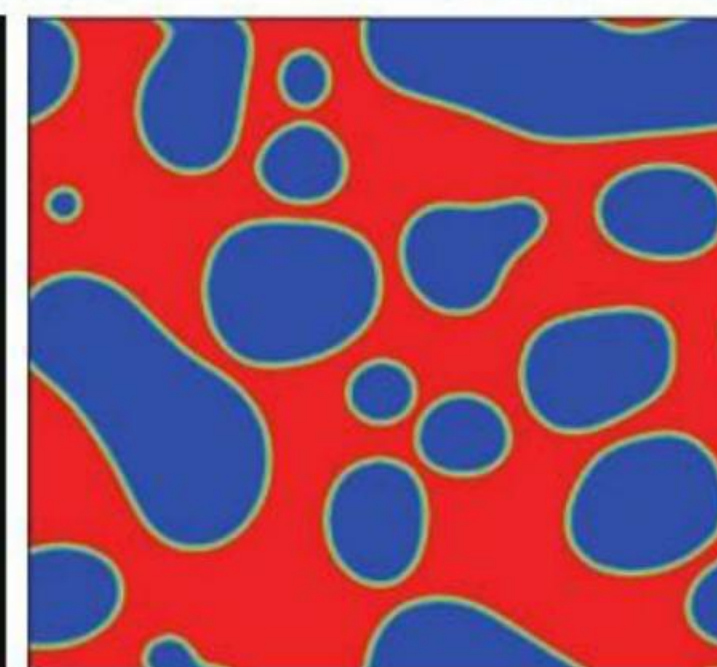
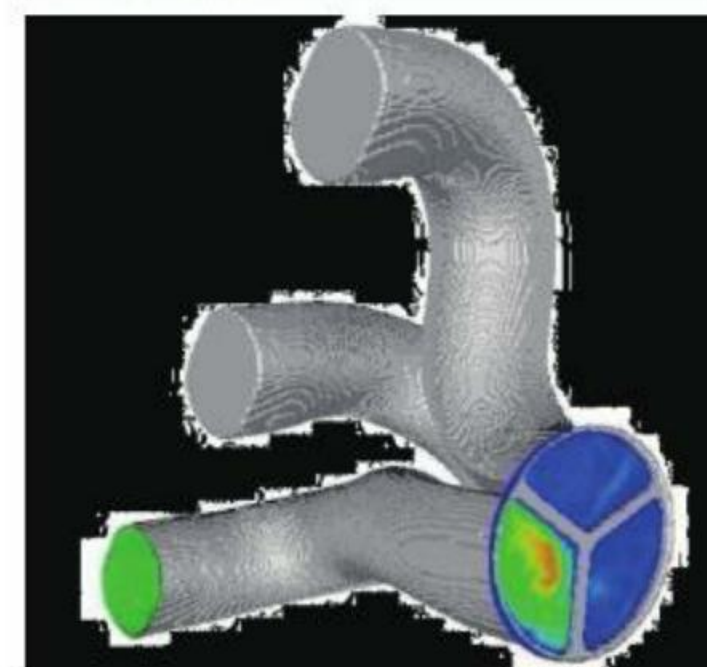
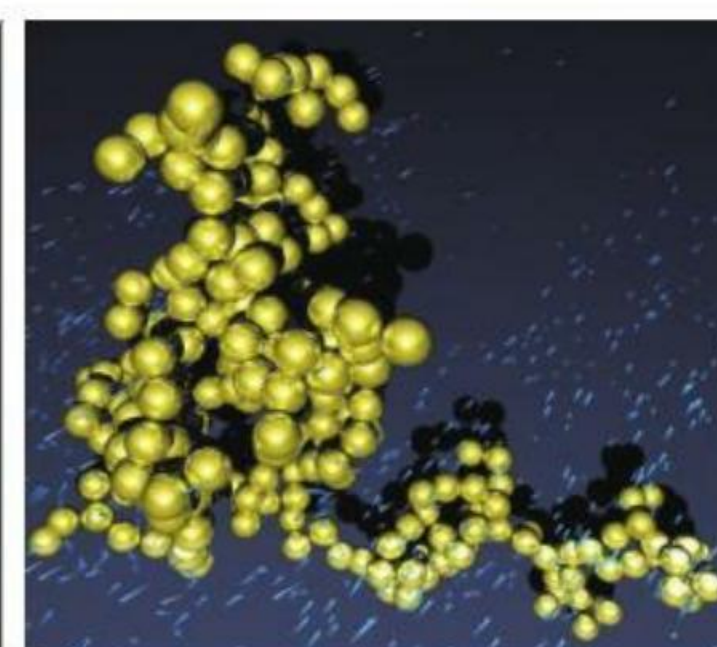
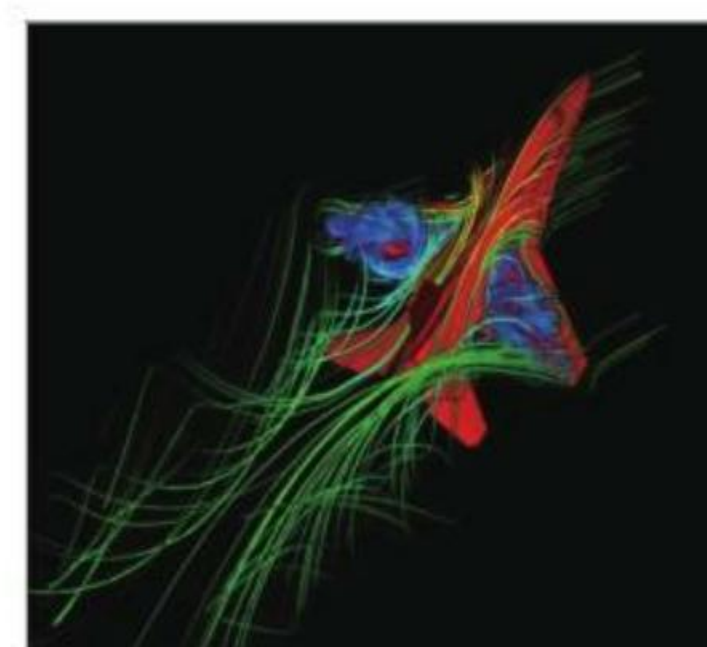
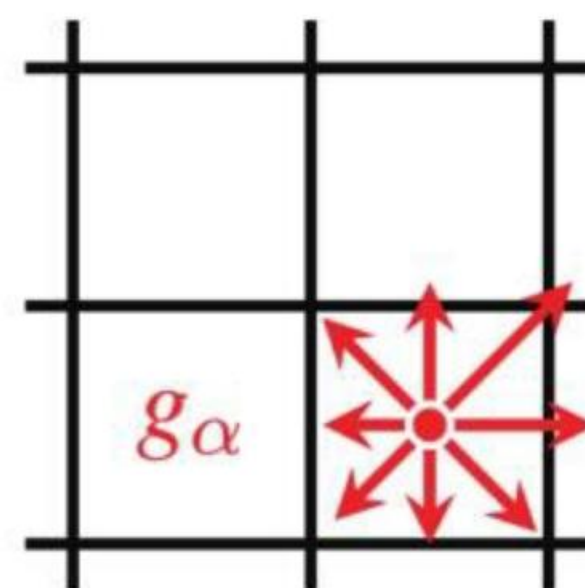
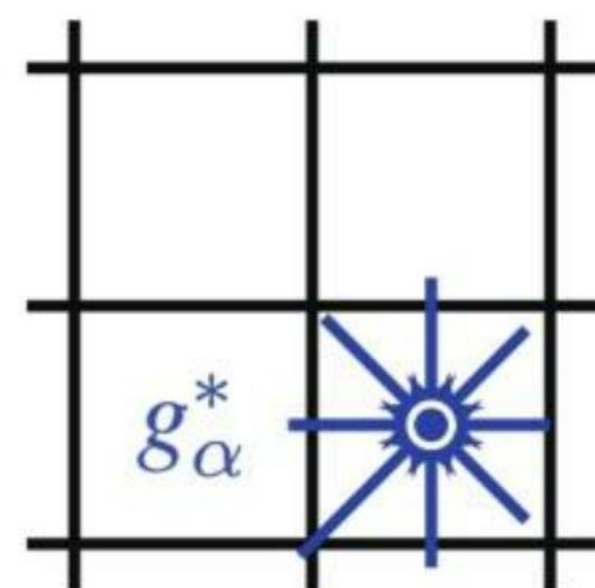
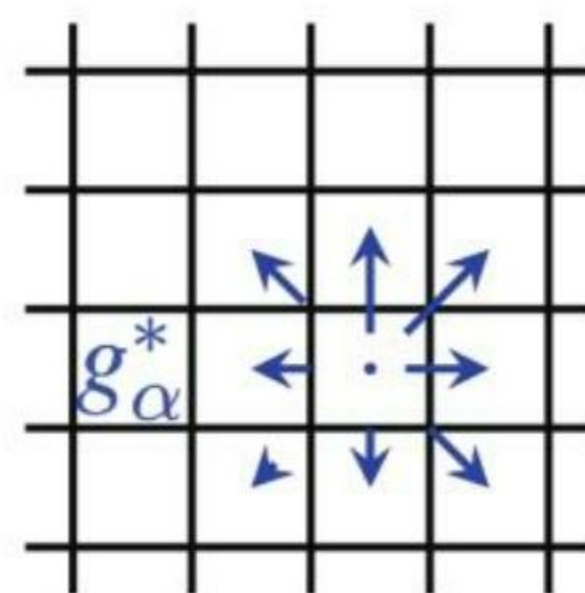
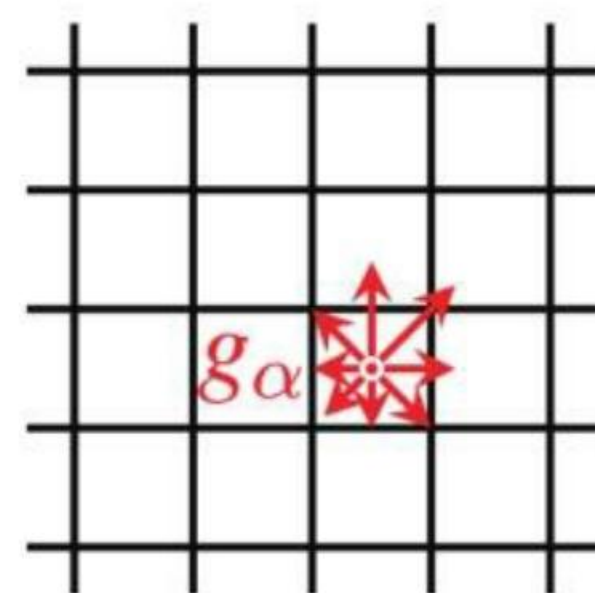
Ludwig Edward Boltzmann
1844.02.20-1906.09.05

1872年, **Boltzmann**方程

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\beta \frac{\partial f}{\partial x_\beta} + \frac{F_\beta}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \xi_\beta} = \Omega(f)$$

思想: **简单**规则、**复杂**现象, **一个**方程、**多种**物理。

$$\underbrace{f_\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{c}\Delta t, t + \Delta t) = f_\alpha(\mathbf{x}, t)}_{\text{streaming}} - \underbrace{\frac{f_i(\mathbf{x}, t) - f_\alpha^{eq}(\mathbf{u}, t)}{\tau}}_{\text{relaxation}} + \underbrace{F_\alpha(\mathbf{x}, t)\Delta t}_{\text{force term}}$$



格子玻尔兹曼方法简介 · 求解偏微分方程

- 求解对流扩散方程的一般形式：可用有限体积法求解

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla \phi) - \nabla \cdot (\mathbf{u} \phi) + S(\phi, T, C).$$

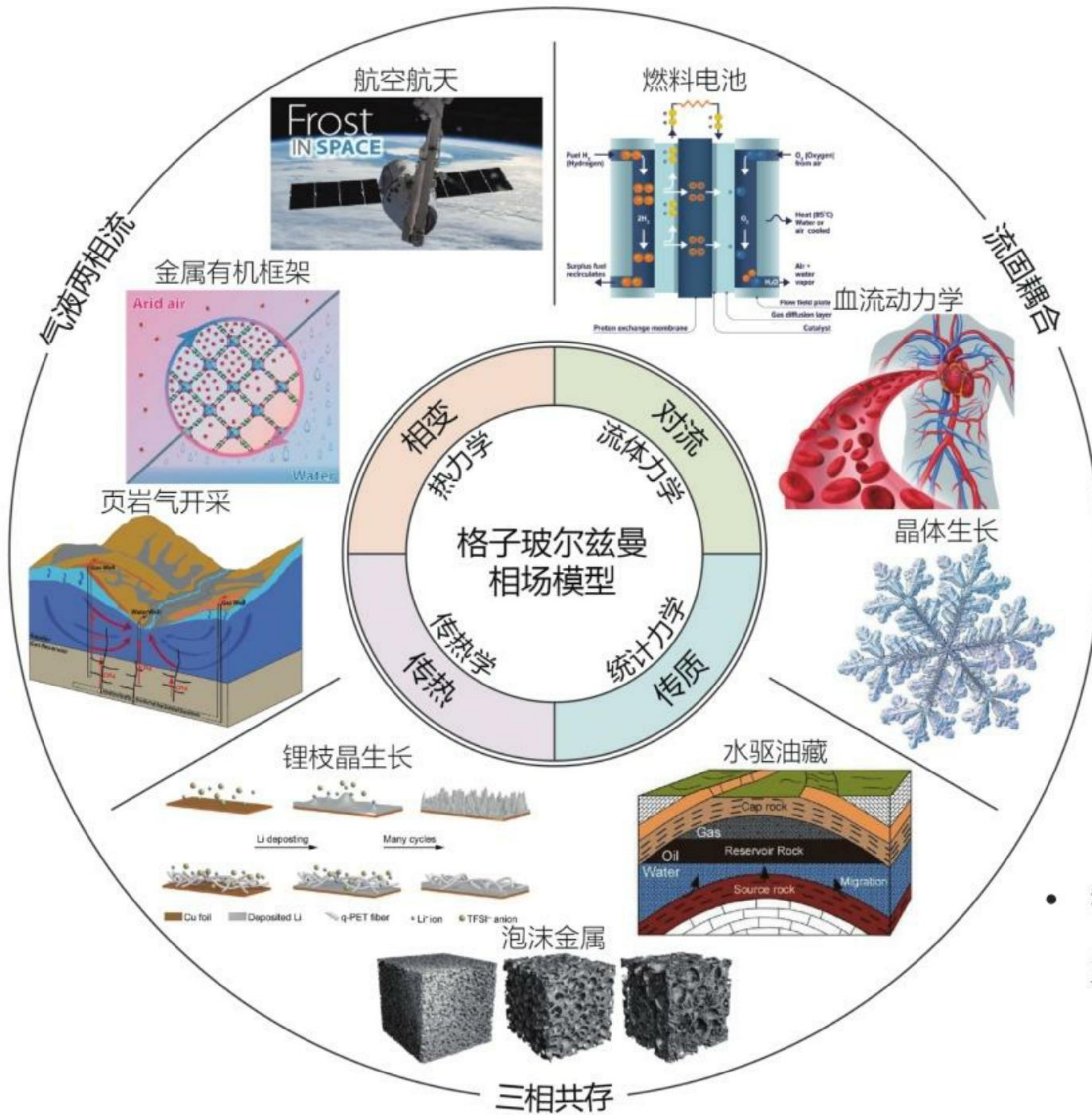
- 扩散项, 非局部项
- 对流项, 非线性项
- 源项 (或外力项)

- 格子玻尔兹曼方法一般格式：求解上述对流扩散方程

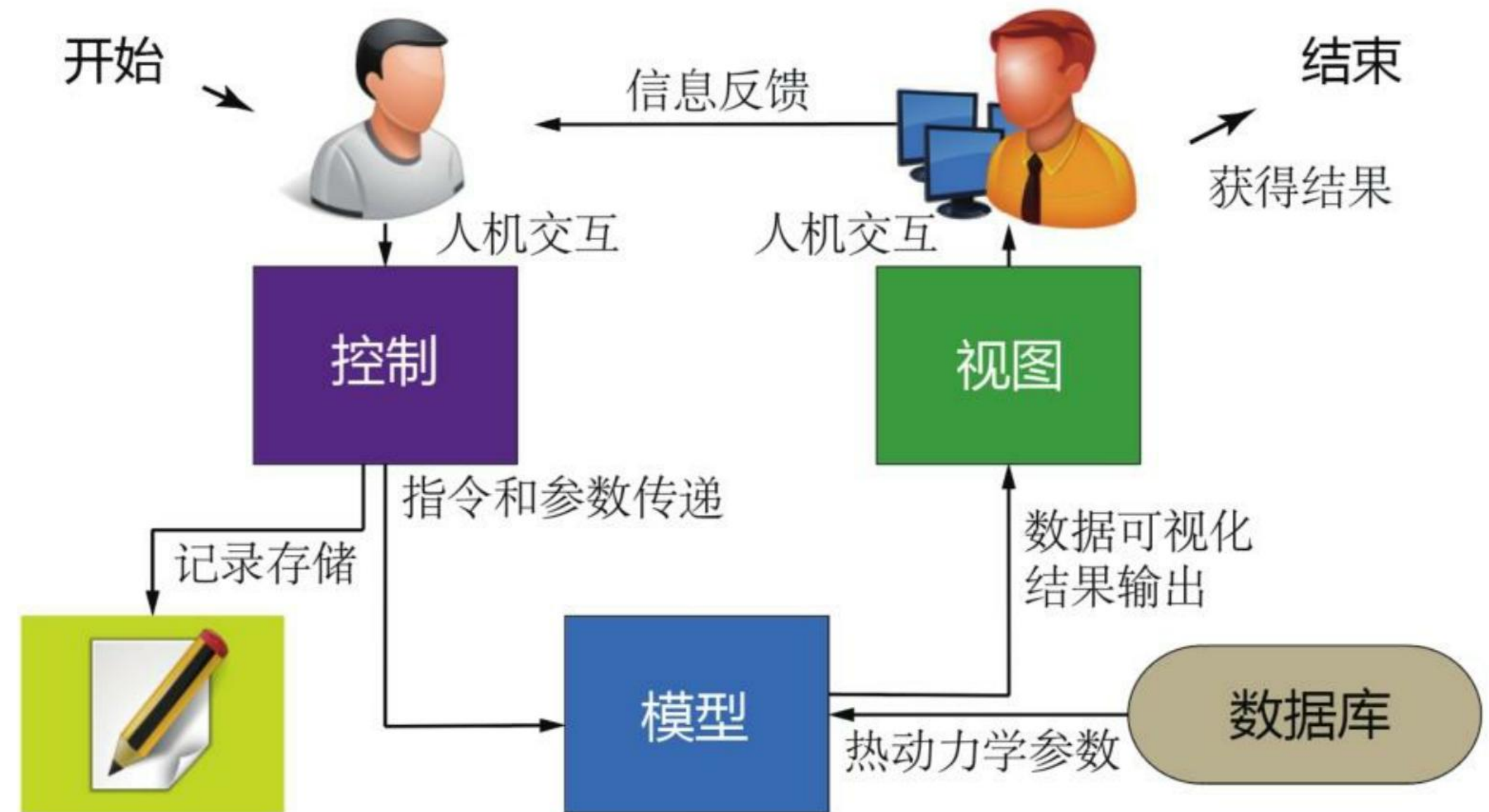
$$g_{\alpha}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_{\alpha} \delta t, t + \delta t) = g_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{\tau_P(\mathbf{x}, t)} [g_{\alpha}(\mathbf{x}, t) - g_{\alpha}^{\text{eq}}(\mathbf{x}, t)] + w_{\alpha} Q_P(\mathbf{x}, t) \delta t.$$

- 扩散作用, 线性化
- 对流作用, 局部化
- 源项保留, 离散化

格子玻尔兹曼方法简介 · 工程与科学计算



· 独特建模与模拟技术 高效而精确



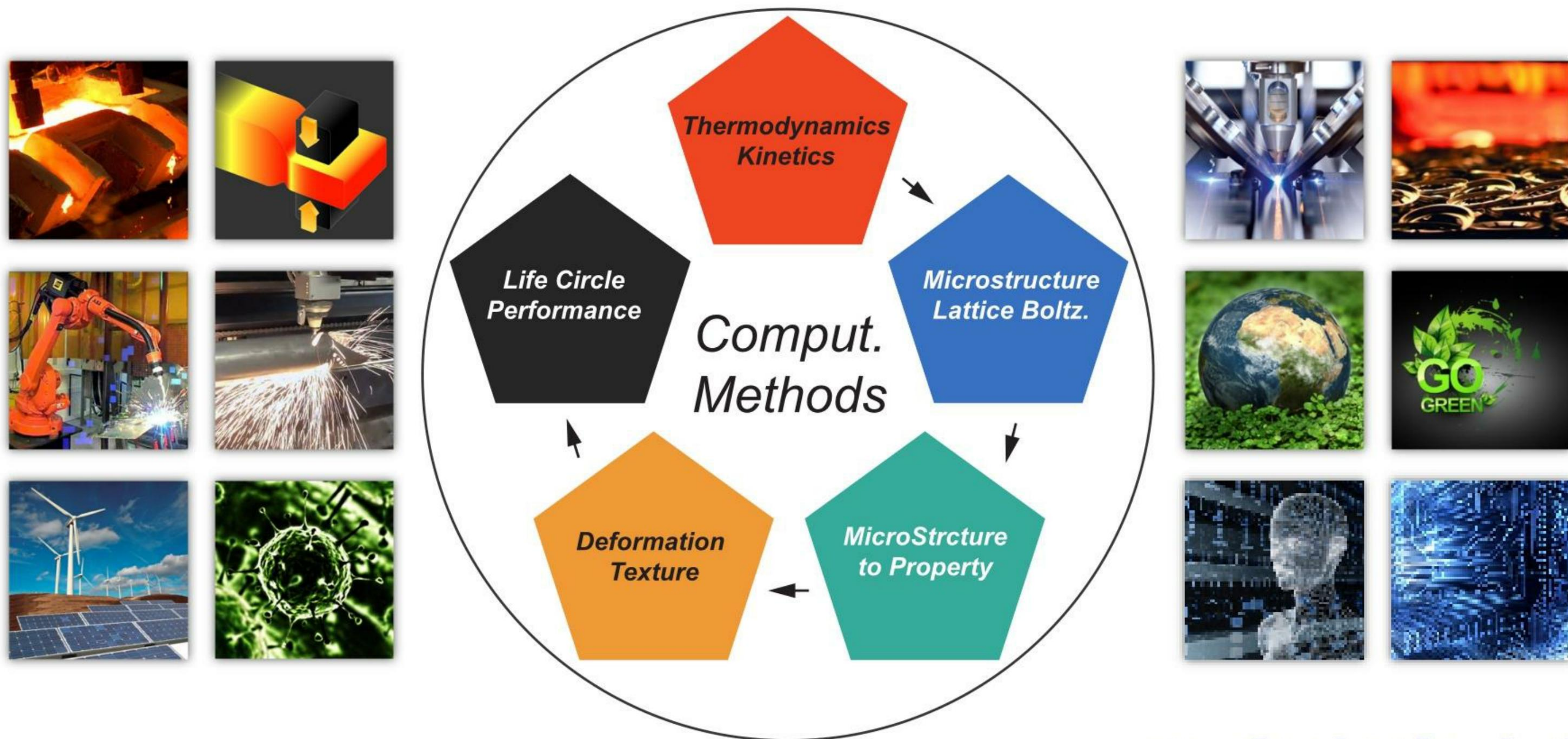
- 针对工程计算建模及模拟中的**非线性**和**非平衡**问题，发展跨**微观-介观-宏观**尺度的数值算法
- 围绕制造过程中**流体流动**、**凝固熔化**、**相变传热**、**多场耦合**等问题开发**集成计算**软件工具

提纲

- ① 计算流体力学的基本概念
- ② 流体力学方程的离散方法
 - 数值微分
 - 数值积分
 - 有限差分法
- ③ 流体力学问题数值求解算例
 - 流场中小球的运动轨迹
 - 矩形管道中不可压缩流体的层流
 - 平板层流边界层的布拉修斯解
- ④ 当代计算流体力学的新进展
 - 计算流体力学分支
 - 湍流问题数值模拟
 - 格子玻尔兹曼方法简介
- ⑤ 计算流体力学发展前景展望
- ⑥ 总结与思考

CFD发展前景展望

材料与**制造**是基础问题（科学），新一轮**科技革命**的前沿难题（技术与工程）



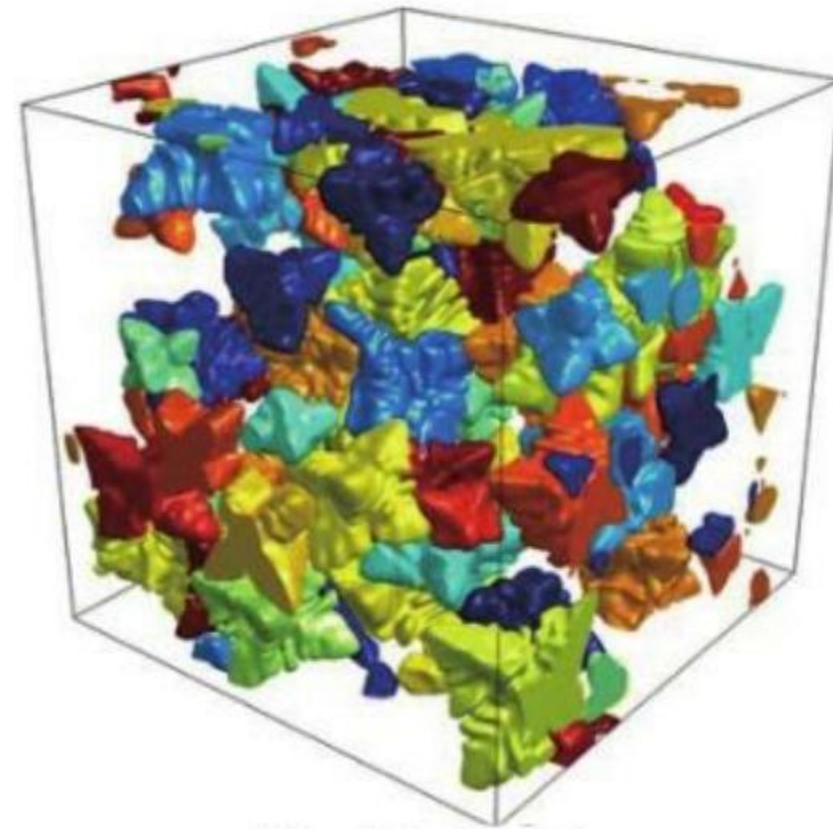
CFD发展前景展望

CFD 在数值方法和计算模型方面已经取得了重要进步. 然而到目前为止, 关于

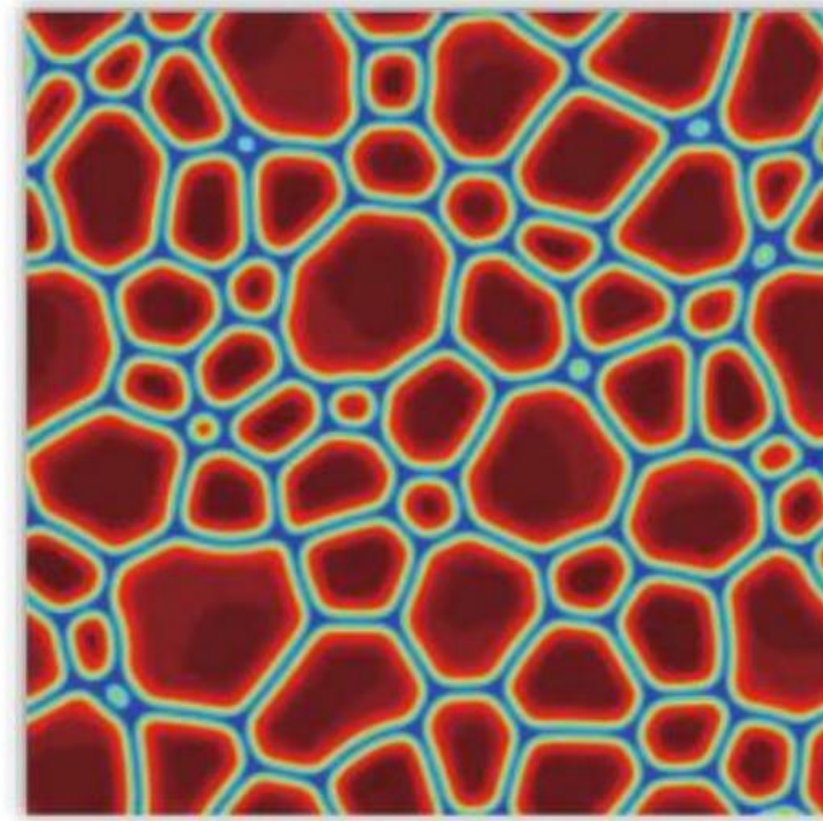
前沿科学与技术问题

- ① 跨音速流动,
- ② 高超音速流动中的强激波,
- ③ 多相流中的气泡机理,
- ④ 生物体中的复杂流动,
- ⑤ 燃烧,
- ⑥ 湍流,
- ⑦ 大涡数值模拟,
- ⑧ 流动与相变

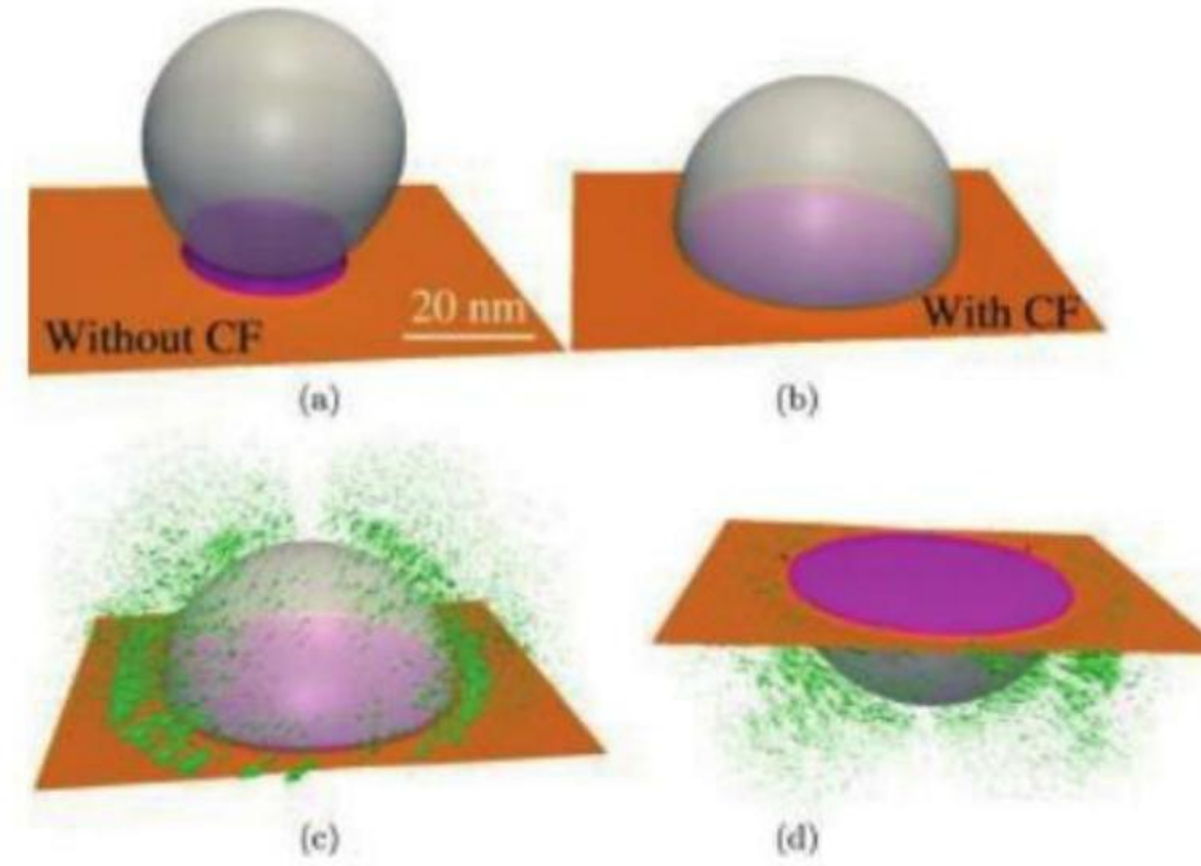
大量流体流动过程问题仍然未得到解决, CFD 必将成为科技前沿, 持续深入地发展.



枝晶生长



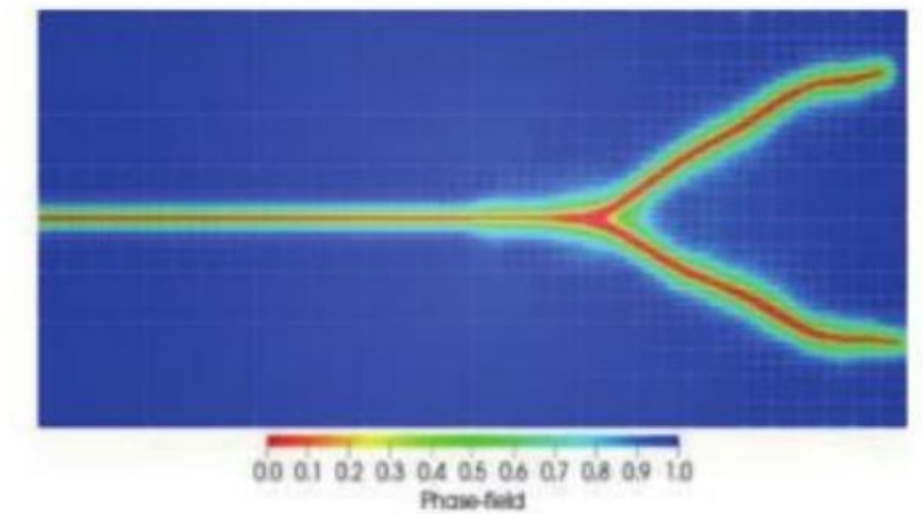
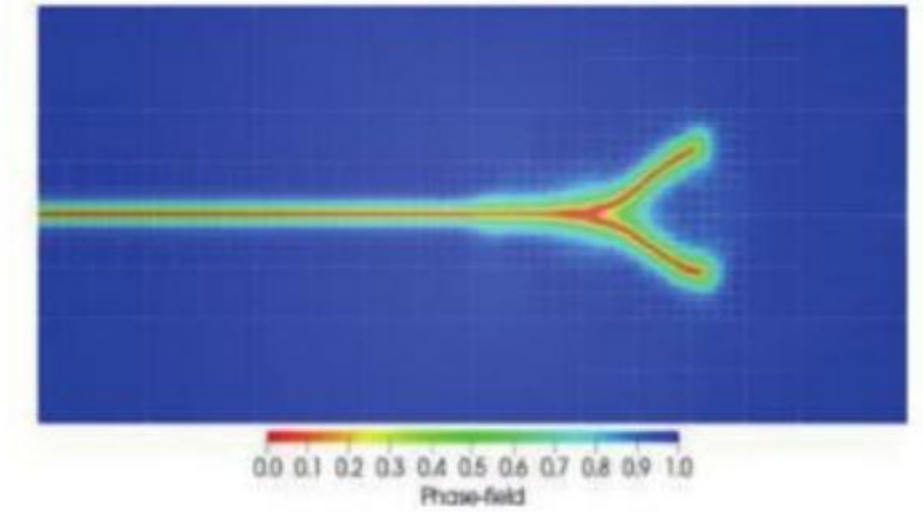
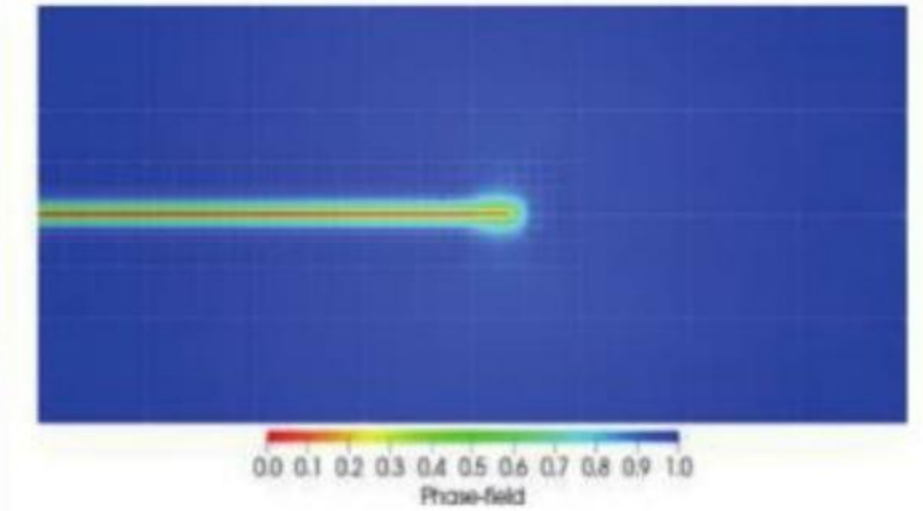
熟化现象



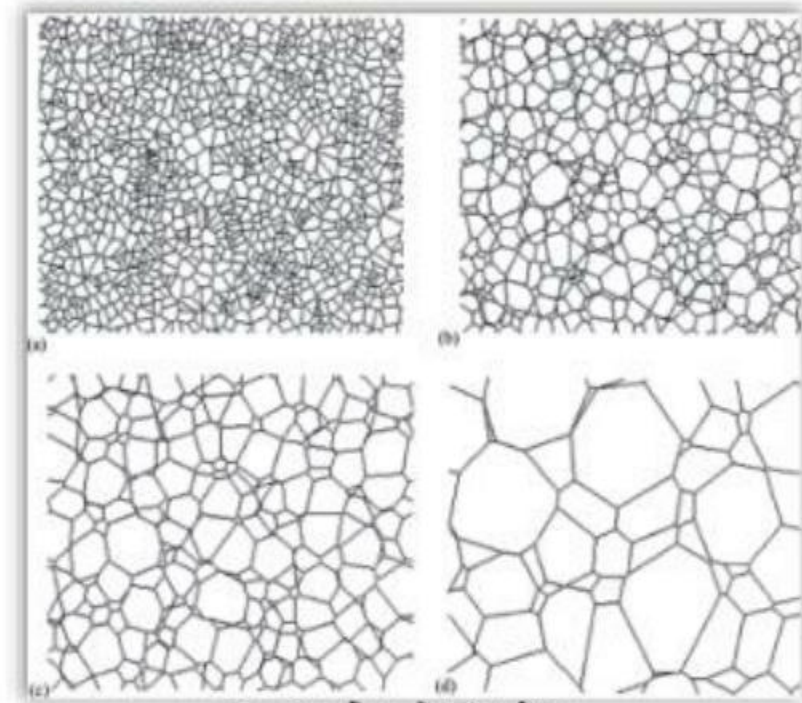
三相接触浸润



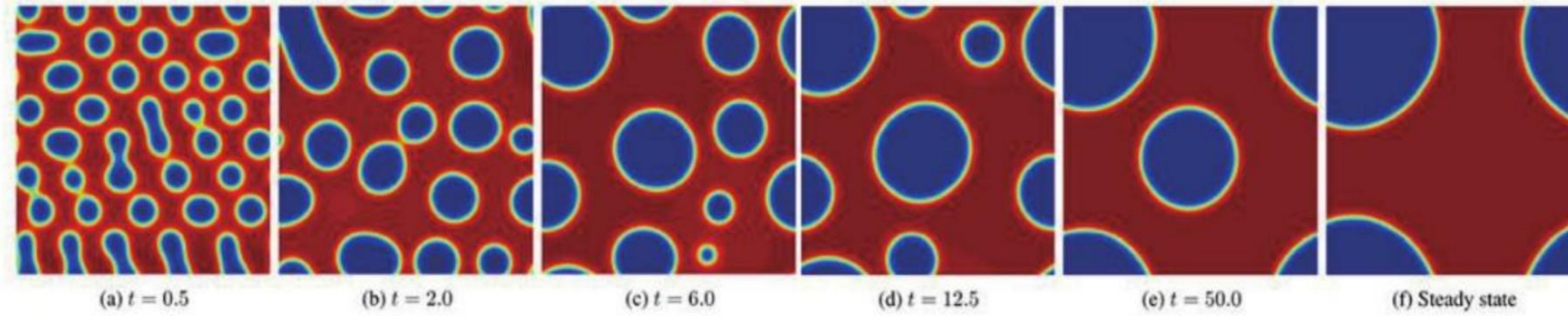
晶粒演化



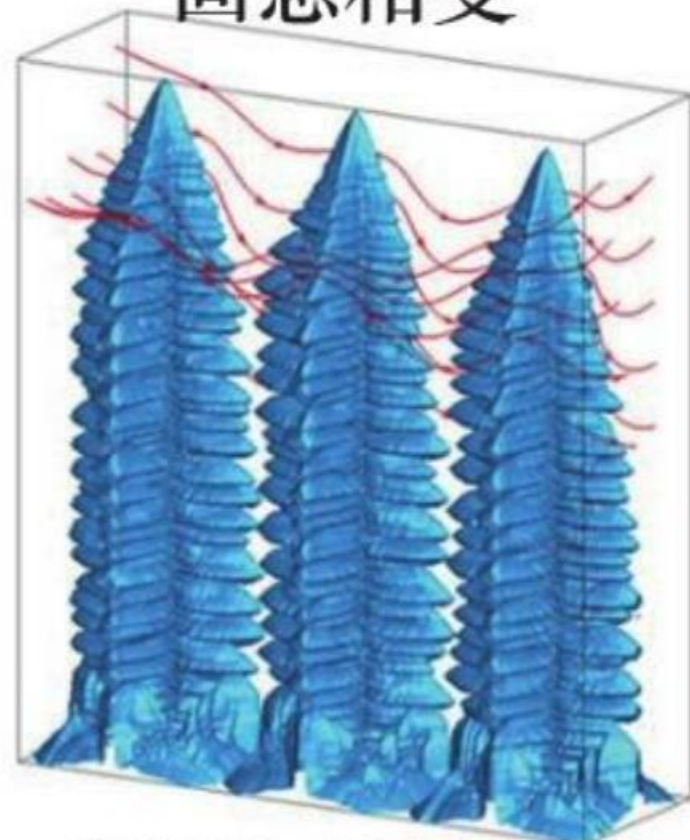
裂纹扩展



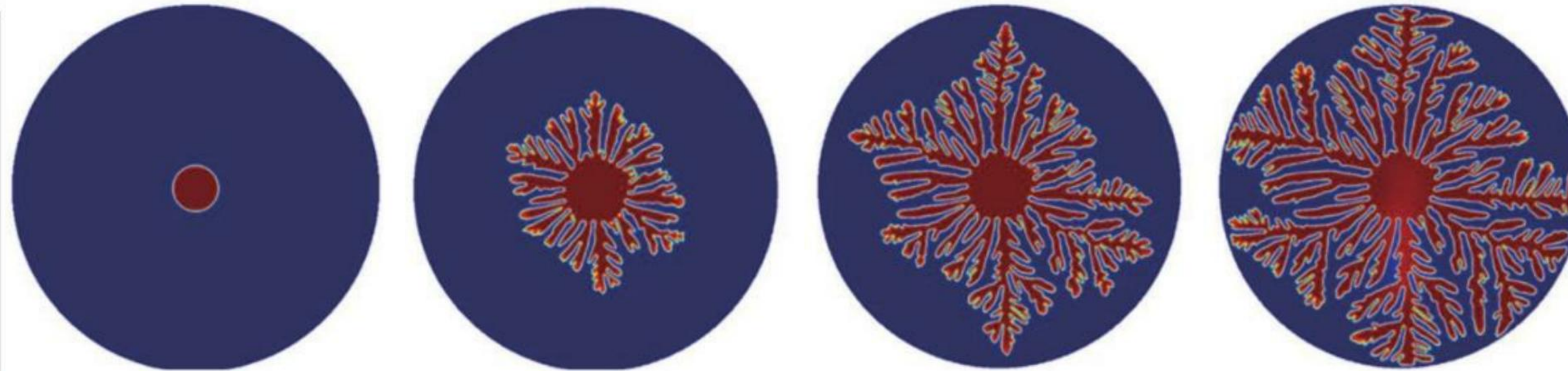
固态相变



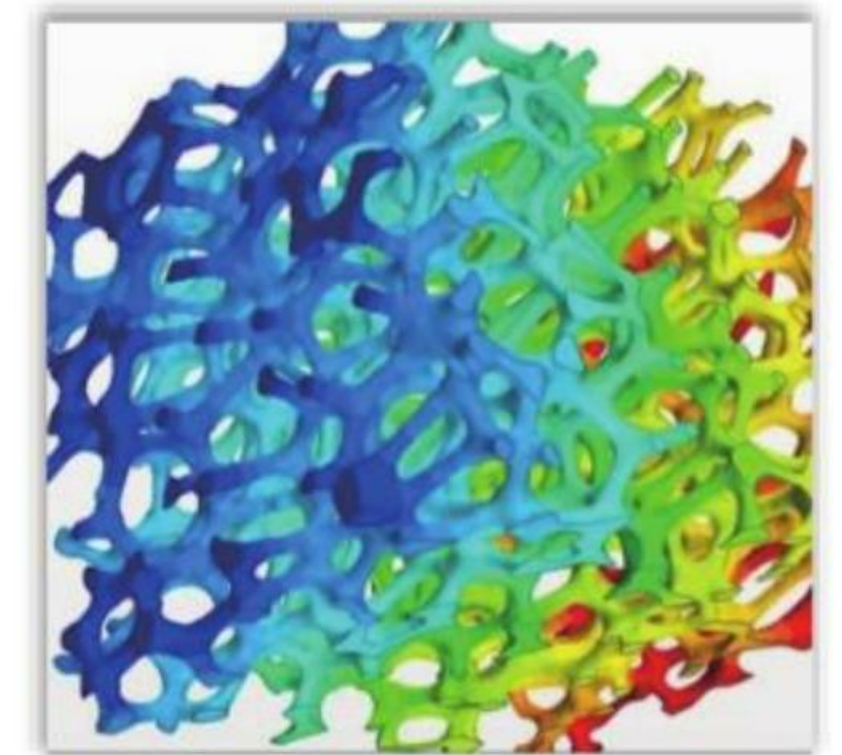
多相流体的复杂流动



对流柱状晶生长



纳米粒子自组织相变



熔体发泡

提纲

- ① 计算流体力学的基本概念
- ② 流体力学方程的离散方法
 - 数值微分
 - 数值积分
 - 有限差分法
- ③ 流体力学问题数值求解算例
 - 流场中小球的运动轨迹
 - 矩形管道中不可压缩流体的层流
 - 平板层流边界层的布拉修斯解
- ④ 当代计算流体力学的新进展
 - 计算流体力学分支
 - 湍流问题数值模拟
 - 格子玻尔兹曼方法简介
- ⑤ 计算流体力学发展前景展望
- ⑥ 总结与思考

总结与思考

- ① 计算流体力学的基本思想是什么？有哪些方法？
- ② 计算流体力学基本步骤与应用领域有哪些方面？
- ③ 请课后调研，列举数据可视化常用方法与软件工具。



投入最核心的领域，引领开创持续努力.

Thanks!
Welcome Questions